# 序　言

自1977年“电磁场”课程单独设课以来，20余年的教学实践已经证明，以分析各类电磁现象的基本规律和应用原理与方法为核心的电磁场课程，是培养合格的电气信息类专业本科生所应具备的知识结构的必要组成部分。近代科学技术发展进程有力地证明，电磁场理论又是众多相关的交叉学科的生长点，是日益延拓的新兴边缘学科发展的基础。因此，作为电气信息类专业本科生必修的一门重要技术基础课，本课程在为学生专业课学习准备必要的知识基础的同时，还关系到增强学生适应和创造能力，完善其基本素质的需要。

多年来，经过全国“电磁场”课程教学工作者矢志不移的努力，已有了一套既不同于原苏联、又不同于西方的教学内容和课程体系。但是，随着面向21世纪科学技术的新发展，以及国民经济对教育事业、人才培养的新需求，电磁场教学的改革是非常必要、非常迫切的。毫无疑义，在电磁场教学内容和体系上的革新，应是在继承基础上的发展与创新。也就是说，应充分肯定现有电磁场教学内容和体系的成功之处，立足于更高质量人才培养的需求，以现代科学技术发展的强大推动力为背景，实现电磁场教学内容和体系的一种螺旋式上升的发展。

本书提出的体系将以电气信息类学生拓宽专业培养口径为立足点，依循日益发展的电磁场工程学科与相关学科，以及基础技术交叉融合的特点，突出强电与弱电的结合；电磁理论与工程实践的结合；电磁理论与相关学科交叉、渗透的结合。

本书内容立意于：首先，在保持必需的理论系统性考虑下，力求避免与物理电磁学之间的重复性叙述，而是务实地在深化概念、具体化理论应用上下功夫，以体现学生“温故而知新”，学以致用的学习成效；其次，在理论联系实际的总前提下，突出电磁场课程学习的方法论指导，以数学建模的思想为学生学习的主线索，以“电磁场的数学物理基础”为学习的起点，精选、充实例题，丰富有启发性的典型习题内容等；再次，面向科学技术发展的集成化、系统化，本书以“工程电磁场应用专题”展示电磁场基本理论与前沿科学间的结合点，用以扩大学生知识面，激发学习兴趣，从而有助于加强学生运用基础理论解决工程实际问题的能力。

综上所述，并结合作者群体在电磁场课程教学，以及电磁场应用研究实践中多年积累的经验、体会，作者寄望本书在面向21世纪电磁场课程的教学改革中，

有助于学生生动活泼地主动学习，学以致用，并对学生的知识、能力与素质培养产生应有的深远影响。

本书在编写过程中，得益于教育部原电工课程教学指导委员会的指导，全国高等学校电磁场教学与教材研究会的关注，以及国内同仁之间在有关电磁场课程的教学内容、教材体系等方面深化教学改革的共识。这正是形成上述本书编写体系和内容的基础，同时，也是本书作者群体由多所院校合作组成的来由。为此，编写组谨向关心和支持本书编写的国内广大同仁，各有关学校、课委会、研究会致以深切的谢意。

经评审，本书被列为“面向21世纪课程教材”，并列入普通高等教育“十五”国家级教材规划。

参加本书编写的有浙江大学倪光正、华北电力大学崔翔、西安交通大学邱捷、西安石油学院晁立东以及浙江大学杨仕友、熊素铭、李玉玲等同志，由倪光正主编。本书初稿承马信山、钱秀英教授初审，其后，马信山教授还对本书定稿仔细审阅，提出了很多宝贵的意见和建议。此外，钱金根、张鸣柳同志对本书的编写给予莫大的关心和支持。谨在此一并致以衷心的感谢。作者还要感谢高等教育出版社对本书出版的全力支持。

限于作者的能力和水平，书中不够完善乃至缺点和错误之处，敬请使用本书的师生和广大读者批评指正。

《工程电磁场原理》编写组

2002年3月

# 常用物理量的符号与 SI 单位

| 符　号 | 量的名称 | 单　位 |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{A}$ | 矢量磁位(磁矢位,磁矢势) | Wb/m |
| $\boldsymbol{B}$ | 磁通[量]密度或磁感应强度 | T |
| $C$ | 电容 | F |
| $\boldsymbol{D}$ | 电位移,电通[量]密度 | $C/m^2$ |
| $d$ | 电磁波在有损媒质中的透入深度 | m |
| $\boldsymbol{E}$ | 电场强度 | V/m(N/C) |
| $e$ | ①电子的电荷量($1.60217733\times10^{-19}$ C) | C |
|  | ②感应电动势 | V |
| $\boldsymbol{e}_x$ | $x$ 轴方向的单位矢量 |  |
| $\boldsymbol{e}_y$ | $y$ 轴方向单位矢量 |  |
| $\boldsymbol{e}_z$ | $z$ 轴方向单位矢量 |  |
| $\boldsymbol{e}_n$ | 法向单位矢量 |  |
| $\boldsymbol{F}$ | 力 | N |
|  | 矢量函数的数学表达式 |  |
| $f$ | 频率 | Hz |
| $f_c$ | 波导的截止频率 | Hz |
| $G$ | 电导 | 1/Ω (S) |
| $\boldsymbol{H}$ | 磁场强度 | A/m |
| $i, I$ | 电流 | A |
| $\boldsymbol{J}$ | 电流密度,面积电流 | $A/m^2$ |
| $\boldsymbol{J}_c$ | 传导电流密度 | $A/m^2$ |
| $\boldsymbol{J}_D$ | 位移电流密度 | $A/m^2$ |
| $\boldsymbol{J}_v$ | 运流电流密度 | $A/m^2$ |
| j | 虚数($j^2=-1$) |  |
| $\boldsymbol{K}$ | 面电流密度 | A/m |
| $\boldsymbol{k}$ | 波矢量 | rad/m |
| $k$ | 波数、相位系数 | rad/m |
| $L$ | 电感、自感 | H |
| $l$ | 长度、距离 | m |
| $\boldsymbol{M}$ | 磁化强度 | A/m |

| 符　号 | 量的名称 | 单　位 |
| --- | --- | --- |
| $M$ | 互感 | H |
| $\boldsymbol{m}$ | 磁偶极距 | $A\cdot m^2$ |
| $m$ | 质量 | kg |
| $N$ | 线匝数 | |
| $\boldsymbol{P}$ | 电极化强度 | $C/m^2$ |
| $\boldsymbol{p}$ | 电偶极距 | $C\cdot m$ |
| $Q$、$q$ | 电荷 | C |
| $\boldsymbol{R}$ | 源点与场点间的距离矢量 | m |
| $R$ | 电阻 | Ω |
| | 电磁波的反射系数 | |
| $\boldsymbol{r}$ | 场点的位置矢量(位矢) | m |
| $\boldsymbol{r}'$ | 源点的位置矢量(位矢) | m |
| $\boldsymbol{r}_{12}$ | 由点1指向点2的位矢 | m |
| $r$ | 球坐标 | m |
| $\boldsymbol{S}$ | 坡印廷矢量 | $W/m^2$ |
| $S$ | 面积 | $m^2$ |
| $\boldsymbol{T}$ | 力矩 | $N\cdot m$ |
| $T$ | 电磁波的透射系数 | |
| | 周期 | s |
| $t$ | 时间 | s |
| $\tan\delta$ | 损耗角的正切 | |
| $U$ | 电压 | V |
| $V$ | 体积 | $m^3$ |
| $v$ | 速度 | m/s |
| $v$ | 相速 | m/s |
| $W$ | 功、能 | J |
| $W_e$ | 电场能量 | J |
| $W_m$ | 磁场能量 | J |
| $w_e'$ | 电场能量密度 | $J/m^3$ |
| $w_m$ | 磁场能量密度 | $J/m^3$ |
| $x$ | 直角坐标 | m |
| $y$ | 直角坐标 | m |
| $Z$ | 阻抗 | Ω |
| $z$ | 直角坐标 | m |
| $\varepsilon$ | 介电常数 | F/m |
| $\varepsilon_r$ | 相对介电常数 | |
| $\varepsilon_0$ | 自由空间的介电常数($8.85\times10^{-12}$ F/m) | F/m |

| 符　号 | 量的名称 | 单　位 |
| --- | --- | --- |
| $\varepsilon'$ | 复介电常数的实部 | F/m |
| $\varepsilon''$ | 复介电常数的虚部 | F/m |
| $\dot{\varepsilon}$ | 复介电常数 | F/m |
| $\eta$ | 介质的特性阻抗 | Ω |
| $\eta_c$ | 有损媒质的特性阻抗 | Ω |
| $\theta$ | 球坐标 | rad |
| $\lambda$ | 波长 | m |
| $\lambda_c$ | 波导的截止波长 | m |
| $\mu$ | 磁导率 | H/m |
| $\mu_r$ | 相对磁导率 | |
| $\mu_0$ | 自由空间的磁导率($4\pi\times10^{-7}$H/m) | H/m |
| $\mu'$ | 复磁导率的实部 | H/m |
| $\mu''$ | 复磁导率的虚部 | H/m |
| $\dot{\mu}$ | 复磁导率 | H/m |
| $\pi$ | 圆周率(3.1415926) | |
| $\rho$ | 电阻率 | Ω·m |
| | 电荷体密度 | $C/m^3$ |
| | 圆柱坐标 | m |
| $\sigma$ | 电荷面密度 | $C/m^2$ |
| $\tau$ | 电荷线密度 | C/m |
| $\Phi$ | 磁通量 | Wb |
| $\varphi$ | 电位 | V |
| | 动态标量位 | V |
| $\varphi_m$ | 标量磁位 | A |
| $\phi$ | 圆柱坐标或球坐标 | rad |
| $\chi_e$ | 电极化率 | |
| $\chi_m$ | 磁化率 | |
| $\Psi,\psi$ | 磁链 | Wb |
| $\omega$ | 角频率 | rad/s |

# 目　　录

# 引　言

## 1. 电磁现象的研究·电磁场理论的建立

18 世纪以来，基于电磁现象的实验研究，确立了静电的库仑定律，电路的欧姆定律，电流之间相互作用的安培定律，以及法拉第的电磁感应定律等经典物理学的伟大成就。在这一系列科学实验的基础上，人们普遍接受了电磁场的实验事实，但是，电磁场在物理概念上的正确描述却依然同步于人类文明史的进程，经过不同观念和思想的对立与争论，才实现了从“超距作用”论到“场”论的划时代的进展。

英国物理学家法拉第（M. Faraday，1791—1867）指出，任何相互作用都不可能是超距的，而应通过某种媒质来传递。在他看来，在电荷、电流或磁体周围存在着一种被他称为“场”的物质，正是这种“场”传递着电或磁的作用。他还进一步把这种看不见、摸不着的“场”用“场线”给出形象化的描绘，提出了电场线[*]和磁场线[**]的概念。法拉第对电磁现象所提出的“场”及其“场线”的概念被公认为物理学中开创性的见解。

在继承和发展法拉第科学论断的基础上，英国物理学家麦克斯韦（J. C. Maxwell，1831—1879）以其深厚的数学根基和高超的逻辑推理能力，将场、场线与流体、流线相类比，即把正、负电荷比作流体的源与汇；电场线比作流线；电场强度比作流速等，引用流体力学的数学方法来描写电场与磁场。这样，通过电磁场空间相邻各点之间场的变化的描述，1865 年麦克斯韦将安培环路定律、电磁感应定律、磁通连续性原理和高斯定律应用于空间的微分元素上，并引入位移电流概念，使相互激励的电场和磁场形成不可分割的统一体——电磁场，其基本规律由精辟的数学语言表达为四个微分方程式，这就是著名的麦克斯韦电磁场方程组。

微分形式的麦克斯韦方程组在概括全部已有的电磁场实验事实的基础上，给出了电磁场空间分布和随时间变化的全部规律。麦克斯韦并由此推导出电磁场传播的波动方程，证明电磁波的传播速度正是光速。因此，他不仅判定光也是

---

[*] 也称电力线。

[**] 也称磁力线。

"以波动形式按电磁波规律传播的一种电磁振动",还预言了电磁振荡能够产生各种波长的电磁波。1886 年德国物理学家赫兹(H. R. Hertz,1857—1894)通过实验证明了电磁波的存在,并且表明电磁波具有与光相同的反射、折射、散射等性质。这一发现直接导致无线电通信的发明,为无线电技术开辟了广阔天地。由此以麦克斯韦方程组为核心建立了宏观的电磁场理论体系。

在随后近百年科学技术的进展中,人类对客观世界的认识,又延伸进入到爱因斯坦相对论和量子论的范畴,实践证明,无论在高速运动或微观世界的条件下,麦克斯韦方程组依然正确。因此,事实上,正是麦克斯韦方程组奠定了我们学习电磁场理论并实践于工程应用的基础。

## 2. 场的描述

从一般性的角度来讨论各类物理场时,关于场的定义,基于物理本质,场可被描述为"遍及一个被界定的或无限扩展的空间内,存在着某种必须予以重视、研究的效应"。例如,对应于自然界的热、电、磁和地球引力等效应,就分别存在有众所周知的温度场、电场、磁场和重力场等。而从数学意义上理解,则场也可被描述为"给定区域内各点数值的集合,并由此规定了该区域内某一特定量的特性"。因此,在引入相应特定物理量(例如,温度 $T$、电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和地球引力 $\boldsymbol{F}$ 等)的基础上,应用数学语言,可将前述的温度场、电场、磁场和重力场分别表示为相应的函数 $T(x,y,z,t)$、$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$、$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$ 和 $\boldsymbol{F}(x,y,z,t)$。这些函数关系分别描述了相应物理量关于空间坐标变量$(x,y,z)$和时间变量 $t$ 的依从关系。

对于电磁场,如上所述,从数学与物理意义相结合的角度理解,它是一个空间分布量,既可以是与时间相关的时变电磁场;也可以是与时间无关的静态电磁场。麦克斯韦方程组指出,时变的电场伴随着磁场,反之亦然。换句话说,时变的电场和磁场相互依赖和制约,形成合一的时变电磁场。显然,从电磁场的基本场量——电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 出发,时变电磁场涉及的是三维空间内随时间变化的矢量场,即 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ 和 $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$。在特定条件下,如同赫兹实验,时变电磁场将产生波,从电磁场源辐射出去。此时,在研究时变电磁场时,电磁场与电磁波的数学描述归结为同一的矢量场函数。对于静态电磁场,其单一的电场或磁场效应将分别表述为三维空间的矢量场,即 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ 或 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$。

应该指出,宏观电磁理论所研究的问题都是相对于分子的线度的大尺度问题。换句话说,在这种宏观尺度下,一块"无限小"的体积(即任一场点上)将能包含大量的分子,所以由此所论的任何场的效应都应是相应大量分子的总效应。正是在这种尺度下,物体可看成是"连续"的 在数量(体积或质量)上无论怎

样细分，也不出现质的变化，而场则可看作为具有某种电磁性质的连续空间，进入物体且与之重合。因此，物理上，宏观电磁理论也称作“连续媒质电动力学”。

## 3．电磁场学科与电磁场工程

电磁场理论是在物理电磁学的基础上，进一步研究宏观电磁现象和电磁过程的基本规律及其分析计算方法。它作为一门重要的技术基础学科，不仅是日趋发展的电工、电子和信息技术的理论基础，而且也是旁及军事、生态、医疗、天文、地质等众多领域新技术理论的生长点。当前，现代科学技术发展日益呈现出各学科间的相互交叉、渗透，工程技术日趋综合集成化的特点，这又进一步推动了电磁场学科的发展，并为电磁场理论的工程应用提供了更为广阔的空间。

世纪之交，人类物质文明的发展速度举世瞩目，其根本原因之一在于“科学技术是第一生产力”，它是经济和社会发展的主要推动力量。同样，在一切与电磁效应相关的领域中，电磁理论是理解近代技术，发展并实现新的科学成果，即高新技术的必不可少的知识本源。如前所述，1831 年法拉第发现并确立电磁感应定律，开创了人类应用电力、实现电气化的新纪元；1865 年麦克斯韦奠定了宏观电磁理论的基础，预言了电磁波的存在，展示了当今信息时代的前景。就本课程学习而言，基于宏观电磁理论，结合总结一百多年来应用电磁技术的发展进程，可以断言，以电磁场的有效控制和利用为基点，各种电磁场工程问题的提出为我们学习、理解电磁场理论知识，并具备分析和解决实际工程电磁场问题的能力开拓了极为宽广的天地。例如，当代电气工程领域中，从旋转电机到静止式的各类电磁装置，日益发展的大容量、超高压等新技术，必然伴随着高能量密度需求的运行工况，从而过热、振动、损耗等一系列与电磁场相关的工程问题的提出，首先聚焦于优化设计的研究课题，而这就推动着电磁场数值计算及其逆问题的分析研究，开始迈上工程实用的阶段；又如，雷达、卫星通信、电视接收、遥感、遥测和遥控、射电天文学等新技术的发展，无一不对基于电磁场与电磁波机理的天线、微波技术提出了一系列的研究课题。因此，以宏观电磁理论为基础，电磁场工程技术在以电磁能量或信息的传输、转换过程为核心的强电与弱电领域中，充分显示其重要作用。而且发展至今，电磁场工程技术与其他相关学科的工程技术相互融合，生成了许多新技术。例如，电磁兼容、生物电磁场机理及其电磁医疗、无损探伤、磁悬浮、超导储能技术等等。

## 4．课程体系与内容的考虑

综上所述，电磁场理论体系完整、内蕴丰富。为了从知识传授与人才培养的基点上，适应现代科学技术对“电磁场”课程提出的需求，本书在体系上力求突出强电与弱电的结合；电磁理论与工程实践的结合；以及电磁理论与相关学科交

叉、渗透的结合。在课程内容的编排上，全书贯穿数学建模的思想，以第一章作为承接学生已有的数学、物理知识，并进而导引入门的基础，然后由第二章至第五章，将分别以各类工程电磁场问题为背景，对各种特定电磁场的基本特性、分析计算方法，以及有关基本问题与实际应用原理等展开系统的阐述，并精选、充实例题，引入有启发性的典型问题。此外，本书以第六章集中展示电磁场基本理论与前沿科学间的结合点，通过"工程电磁场应用专题"扩大学生知识面，激发学习兴趣，有助于加强学生运用基础理论解决工程实际问题的能力。

教学实践业已证明，虽然电磁场理论课程概念性强，内容较为抽象，但是，只要坚持理论联系实际，面向工程实际的需要，知难而进，在学习中充分运用自己的数学和物理基础知识，并赋予必需的抽象思维的能力，那么，电磁场理论作为工科电类专业的一门重要的技术基础课，必将在青年学生的知识结构、素质培养上产生极为积极的重要作用。同样，教学实践也已证明，本课程学习对于大学生的终身教育也将产生十分深远的影响。

# 第1章

# 电磁场的数学物理基础

本章在物理电磁学的基础上,以“场”的观点来分析研究宏观电磁现象的基本规律。为此,由时变电场和时变磁场相耦合形成的统一的电磁场出发,首先,阐述电磁场物理模型的构成,概括了源量、场量和媒质的电磁性能参数等概念;其次,基于电磁场是一种矢量场,集中在矢量场所涉及的矢量分析和场论的数学基础知识点上,展开了简明的论述;然后进一步承接物理电磁学的课程内容,通过深化对电磁感应定律和全电流概念的理解,确立对宏观电磁理论基础——麦克斯韦方程组在数学和物理意义上的完整描述。

## 1.1 电磁场物理模型的构成

宏观电磁理论对于普遍的宏观电磁现象和电磁过程基本规律与基本分析计算方法的研究,已经形成电工技术领域中两门重要的基础学科——“电路”和“电磁场”。“电路”是运用“路”的观点,通过理想化的电路模型的构造,把宏观电磁现象和电磁过程约束在一维的“电流通路”之中,然后进行分析研究。显然,与“电磁场”的研究方法(即以“场”的观点,一般性地分析研究在三维空间分布的宏观电磁现象和电磁过程的方法)相比,“电路”的研究方法有其局限性。引入“电路”概念实质上是对电磁概念的一种简化处理。

由于电路和电磁场研究的对象都是各类电工电子装置中所发生的共同性的电磁现象和电磁过程,而且“路”是“场”的一种特殊形式,因此,在读者已经具备较多的电路理论知识的基础上,通过类比,建立对电磁场物理概念的基本认识,将是十分有益的。

在电路理论按演绎法展开阐述时,首先,建立了理想化的电路模型——由理想电源和电阻元件、电感元件及电容元件组成的电路模型。此时基本物理量定义为电压($u$)、电流($i$),以及对应于基本电路元件,定义了电阻($R$)、电感($L$)和电容($C$)三个基本电路参数;其次,规定了基本物理量的数学运算方法。例如,在集总参数电路中,对于直流电路,其主要系统变量所涉及的电压、电流为常量,

此时，支配基本量的数学方程是代数方程；对于交流电路，系统变量是标量，且与时间相关联，但与空间坐标无关，此时，支配基本量的数学方程是常微分方程。然后，在科学实验论证的基础上，基于电路模型，给出宏观电磁现象和电磁过程的基本规律性的数学描述，即一系列基本定律与法则，例如，基尔霍夫电压和电流定律等。演绎法的展开，即可对应于千变万化的各类电网络的电磁现象和过程，分析研究其激励源和响应之间的基本特性、分析计算方法，以及实际应用原理等问题。

比照电路理论的分析处理方法，在电磁场理论的论述中，同样可以运用演绎法。由本章起始，将有序地提出关于电磁场物理模型的概念，给出其基本物理量的定义；然后，根据电磁场随时间和空间分布的特征，对应的基本物理量一般是与时间变量有关的空间矢量函数，为此，必须运用矢量代数和矢量微积分的数学知识，且归结为偏微分方程形式的数学描述。这样，便可在数学和物理相结合的清晰而坚实的知识基础上，深入理解和掌握描述宏观电磁现象和电磁过程基本规律性的普适的数学模型——麦克斯韦方程组。

### 1.1.1 电磁场的基本物理量——源量和场量

在电磁场物理模型的构造中，与电路模型中的激励和响应相对应，其基本物理量总体上可归类为源量和场量两大类。通过电磁现象的实验研究早已确认：在电荷及电流（即运动的电荷）的周围空间存在着电场和磁场。因此，人们习惯上把电荷及电流看作电磁场的源量，而把表征电磁场基本特性的两个物理量——电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 看作电磁场的基本场量。应该指出，在电磁场的作用下，常会伴随“二次电场”或“二次磁场”效应。例如，在电场作用下物质极化或在磁场作用下物质磁化，都会激发出相应的电场或磁场。同样，随时间变化的电场会激发磁场；随时间变化的磁场会激发电场。因此，从概念上理解，这些伴生电磁场的场“源”，也可称为二次“源量”，但习惯上并不将它们归入源量。此外，伴生电磁场还可能对电荷和电流产生电磁力的作用，引起电荷和电流的重新分布，反过来又影响原来的场。所以在电磁场问题中原因和效应之间的区别，并不总是那么明显。但是为了理解和讨论的方便，通常还是把电磁场物理模型中的基本物理量分为源量和场量两大类。在一般情况下，电磁场的源量和场量均随所在空间的位置和时间而变化，即可表述为空间坐标和时间变量的函数，如上述两个基本场量的数学函数式可分别记为 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ 和 $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$。

源量之一的电荷 $q$（或记作 $Q$），是物质基本属性之一。1907—1913 年间，美国科学家密立根（R. A. Milliken，1868—1953）通过油滴实验证明，电荷量是量子化的，即电荷是不连续的，有其最小的、不可分割的基本电荷量。该基本电荷

量即为电子 $e$ 所带有的电荷量,现代精确测定的电子电荷量值为

$$e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

由此可知,一般带电体的电量应是 $e$ 的整数倍。在宏观意义下,考察由大量聚集的电荷(往往涉及数以亿计的电子电荷 $e$ 的组合)所产生的电磁效应时,显然,可不必考虑电荷量子化的事实,而采用可以连续地任意取值的方式,换句话说,可以采用平滑的平均密度函数的方法,来给定带电体的电荷量。

取决于电荷分布的不同形态,以静态分布而言,通常有如下四种给定的分布形式:

1. 点电荷分布形式:即理想化带电体的几何尺寸可忽略不计的集中电荷 $q(x',y',z')$ 或 $q(\boldsymbol{r}')$ *;

2. 电荷体密度的分布形式:当电荷在宏观意义上连续地分布于体积 $V$ 内时(如雷积云带电方式),可给定该体积内任一源点($\boldsymbol{r}'$)处的电荷体密度为

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta q(\boldsymbol{r}')}{\Delta V'} = \frac{\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')}{\mathrm{d}V'}\ (\text{单位:C/m}^3) \qquad (1-1)$$

式中位于 $\boldsymbol{r}'$ 处的元体积 $\Delta V'$ 的选择,应在几何尺寸上远小于所讨论电磁系统的尺寸,但又要大到使其内的净电荷量 $\Delta q(\boldsymbol{r}')$ 足以包含大量基本电荷。这样,所定义的电荷体密度 $\rho$ 将是空间坐标变量的连续函数,足以精确反映在一定体积中电荷连续分布的宏观效应。

3. 电荷面密度的分布形式:当电荷连续地分布于厚度可以忽略的面积上时(如在静电平衡条件下,带电导体的电荷即以此种电荷面密度分布的形态呈现在导体表面)。此时,仿照定义电荷体密度 $\rho$ 时的同样物理上的考虑,可以给定所论面积 $S'$ 上任一源点处的电荷面密度为

$$\sigma(\boldsymbol{r}') = \lim_{\Delta S' \to 0} \frac{\Delta q(\boldsymbol{r}')}{\Delta S'} = \frac{\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')}{\mathrm{d}S'}\ (\text{单位:C/m}^2) \qquad (1-2)$$

4. 电荷线密度的分布形式:当电荷沿截面积可以忽略的线形区域分布时(如研究架空输电线对地电场效应时,作为场源的架空输电线的带电方式,在忽略输电线截面几何尺寸的前提下,即可理想化为此种分布形式),定义电荷线密度为

$$\tau(\boldsymbol{r}') = \lim_{\Delta l' \to 0} \frac{\Delta q(\boldsymbol{r}')}{\Delta l'} = \frac{\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')}{\mathrm{d}l'}\ (\text{单位:C/m}) \qquad (1-3)$$

如果已知上述各种电荷的分布规律,则对应的 $q$、$\rho$、$\sigma$ 和 $\tau$ 都应是已知的空间坐标变量的函数。又若已知电荷均匀分布,则意味着这些源量都将是某个已知的常量。

---

* 对应于场源和场量作用的所在处,即源点和场点位置,本书将采用加撇的坐标($x'$,$y'$,$z'$)或位矢($\boldsymbol{r}'$)表示源点,而用不加撇的坐标($x$,$y$,$z$)或位矢($\boldsymbol{r}$)表示场点。

同样作为电磁场源量之一的电流 $i$，源于电荷的运动。电流 $i$ 的定义是电荷对时间的变化率，即

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \text{（单位：C/s 或 A）} \tag{1-4}$$

式中 $\mathrm{d}q$ 是 $\mathrm{d}t$ 时间间隔内流过某一定截面 $S$ 的电量，因此电流不是一个点函数。在电磁场模型构造中，目的在于描述电磁场的源量与场量之间藉助于空间媒质建立的基本规律，即场域空间内各点电磁现象和过程变化的规律性。为此，应定义一个与电流相关的点函数，作为产生场效应的源量，这就是电流密度（也称面积电流）$\boldsymbol{J}$。$\boldsymbol{J}$ 是一个矢量点函数，它表示流过垂直于电荷流动方向的单位面积内的电流总量，其模定义为

$$|\boldsymbol{J}| = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta S_n} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}S_n} \text{（单位：A/m}^2\text{）} \tag{1-5}$$

式中 $\Delta i$ 为流过垂直于电荷流动方向的面元 $\Delta S_n$ 内的电流，当 $\Delta S_n$ 趋于"无限小"时，$\Delta i$ 与 $\Delta S_n$ 的比值即描述了作为点函数的电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 的大小或模，而其方向则定义为正电荷运动的方向。

1785 年法国物理学家库仑（C. A. Coulomb，1736—1806）所做的静电力实验，定量地研究了电场对静止电荷的作用力，从而定义了表征电场特性的基本场矢量——电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{q_t \to 0} \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{q_t} \text{（单位：N/C 或 V/m）} \tag{1-6}$$

式中对被研究的电场所引入的试体电荷 $q_t(>0)$，务求其几何尺寸很小，且携带的电量也必须小到不至于影响被研究的电场。然后，由该试体电荷在场点（$\boldsymbol{r}$）所受的电场力 $\boldsymbol{F}$ 与 $q_t$ 之比值，确定地描述了仅与该点电场有关而与试体电荷量无关的所论电场的基本特征。大量科学实验证明，电场不只是存在于静止电荷的周围空间。在通有电流的导体中，在由交变电流激励的电磁装置的周围空间内都存在着电场。对于这些广泛的电场问题，研究与分析的首要任务必然是在给定源量的作用下求其电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$（可简称为场强）随空间和时间变化的规律性。

1820 年丹麦物理学家奥斯特（H. C. Oersted，1777—1851）发现了电流的磁效应。同年，法国物理学家安培（A. M. Ampere，1775—1836）确立了电流之间通过磁场力相互作用的安培定律，而法国物理学家毕奥（J. B. Biot，1774—1862）和萨伐尔（F. Savart，1791—1841）则在重复奥斯特实验的基础上，总结了线电流之间的磁场力的定量关系，即熟知的毕奥－萨伐尔定律。仿照由静止电荷受到电场力作用的特性定义电场强度，在磁场中，根据实验事实，人们同样从运动电荷受到磁场力作用的特性定义基本场矢量——磁感应强度（也称磁通[量]密度）

$\boldsymbol{B}$。换句话说，由在磁场中以速度 $v$ 运动的元电荷 $\mathrm{d}q$ 所受到的磁场力（洛伦兹力）来定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (1-7)$$

上式可作为磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义公式。因为，由式(1－7)可知，场矢量 $\boldsymbol{B}$ 在数值上等于单位运动电荷以单位速度在与磁场相垂直方向上运动时所受到的磁场力，即

$$B = \frac{(\mathrm{d}F)_{\max}}{\mathrm{d}qv}$$

注意，上式仅表明当 $\boldsymbol{B}$ 的方向与运动电荷速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相互垂直时 $\boldsymbol{B}$ 的数量关系。在一般情况下，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 的数值和方向应满足定义式(1－7)所示的关系，且为空间矢量点函数。在 SI 单位制中，$\boldsymbol{B}$ 的单位为特斯拉(T)，也可用韦伯/米$^2$($\mathrm{Wb/m^2}$)表示。

导体内的电流 $I$ 是由电荷的定向运动形成的，$I=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$。而导线内以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的元电荷 $\mathrm{d}q$，在 $\mathrm{d}t$ 时间内对应的元位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$。也就是说，在 $\mathrm{d}t$ 时间内穿过导线某一截面的电量为 $\mathrm{d}q$。因此由 $\mathrm{d}q\boldsymbol{v}=\mathrm{d}q(\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}t)=(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表明，$\mathrm{d}q\boldsymbol{v}$ 也就是所定义的元电流段 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。这样，式(1－7)也可表述为元电流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场中受力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) \qquad (1-8)$$

可以认为：基于载流导体在磁场中受力的特性，式(1－8)从另一侧面确立了磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义。科学实验同样证明，磁场不只是存在于磁铁或恒定电流的周围空间，也存在于电磁波中，存在于由交变电流激励的电磁装置的周围空间内。因此，对于广泛的磁场问题，也将首先聚焦于场分布，即磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ 随空间和时间变化规律性的分析。

### 1.1.2 电磁场中的媒质及其电磁性能参数

在电磁场源量作用下，电磁场物理模型所对应的各种电气装置中的电磁现象，本质上将取决于构成装置和场域的各种媒质的几何结构及其电磁性能。媒质的电磁性能（如导电、导磁或绝缘、抗磁等）无疑均与形成媒质的物质材料的微观结构相关。但是，我们研究的只是宏观电磁现象，在宏观的这种尺度下，已如引言所述，即使“无限小”体积也将包含大量的分子，所以任何效应都是相当大量分子的总效应。由此可将媒质看成是“连续”的，即在其体积或质量的实体意义下，无论怎样细分也不会出现质的变化。也就是说，可以不必深入探求构成电磁场媒质的各种物质材料的微观结构，而只需研究媒质的微观结构在与电磁场相互作用下所表征的宏观统计平均效应，采用若干个宏观等效的物性参数来描述

媒质的电磁性能。在物理电磁学中已经给出描述物质材料电磁性能的三个宏观电磁参数——电导率 $\gamma$、磁导率 $\mu$ 和介电常数 $\varepsilon$。这三个电磁性能参数在电磁场问题中的地位相当于 $R$、$L$ 和 $C$ 这三个电路元件参数在电路问题中的作用。具体地说，电导率 $\gamma$ 反映了材料的导电性能；磁导率 $\mu$ 反映了材料宏观的磁化性能；介电常数 $\varepsilon$ 则反映了材料在电场作用下的极化性能。

当场域空间有别于理想化的真空（即所谓自由空间）状态而引入相应媒质时，在物理电磁学中也已引入另两个基本物理量——电位移矢量（也称电通[量]密度）$\boldsymbol{D}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。这两个场矢量分别在研究媒质中电场问题和媒质中磁场问题时得到应用，它们的定义式分别与媒质的电磁性能参数 $\varepsilon$ 和 $\mu$ 相关联，构成与基本场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系分别为：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1-9}$$

和

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \tag{1-10}$$

上述两式亦称为媒质的构成方程。$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\varepsilon$、$\mu$ 的单位分别是：库仑/米$^2$（$C/m^2$）、安培/米（A/m）和法拉/米（F/m）、亨利/米（H/m）。与方程（1-9）、（1-10）相关联的有媒质存在时的极化场和磁化场效应，将分别在第二章和第三章中深入分析。

真空作为一种特殊媒质，具有表征其电磁性能的等效宏观电磁参数——介电常数 $\varepsilon_0$ 和磁导率 $\mu_0$。这两个分别和电、磁现象相关的真空的电磁参数，与真空中电磁波（包括光）的传播速度 $c$ 一起，构成为电磁场物理模型中的三个通用常数。在 SI 单位制中，其数值分别等于：

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \mathrm{F/m} \approx 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

并且与真空中的光速 $c$ 存在如下确定的关系：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

事实上，以上关于真空电磁性能参数的定义、实验测定值、及其与光速之间的内在联系，再一次证实了电磁场的物质性。基于电磁现象的实验研究，结合往后关于电磁场能量以及遵从能量守恒与转换定律等内容的讨论，可以确认：电磁场是物质存在的一种形态，它和其他物质形态一样按照一定的客观规律运动变化。但它又是一种特殊形式的物质，按其固有的特征，弥漫在空间中，并具有波动性和叠加性。由此再次可知，对于电磁场运动状态的描述，在数学上必然归结为研究空间矢量函数，即电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$、电通[量]密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ 或磁场强度 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ 随空间和时间变化的规律。

## 1.2 矢量分析

电磁场是一种矢量场，因此，矢量分析是学习、研究电磁场理论及其应用的基本数学工具之一。与场的物理概念相联系的有关矢量分析的数学关系式概括了各类物理场的共同特征及其变化规律，形成了有关场论的基本概念与定理。这些数学基础知识是后续各章论述的必备条件。

### 1.2.1 矢量代数

从数学语言出发，电磁现象的特征量可归类为标量（如电荷、电流、电位、能量等）和矢量（如电场强度、磁感应强度等）两类数学描述。

1. 标量：仅具有大小特征的量。标量在空间的分布即构成标量场，如电位场（位场）

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3, t)$$

其中$(u_1, u_2, u_3)$为空间场点的坐标。取决于正交曲线坐标系的选取，$u_1$、$u_2$、$u_3$分别为相应的坐标变量（图1-1给出了常用的直角坐标系），$t$为时间变量。为简化书写，上式亦常记作

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t)$$

其中$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z$为所论场点的位矢。若所论位场与时间无关，即得静态位场的数学描述为

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$$

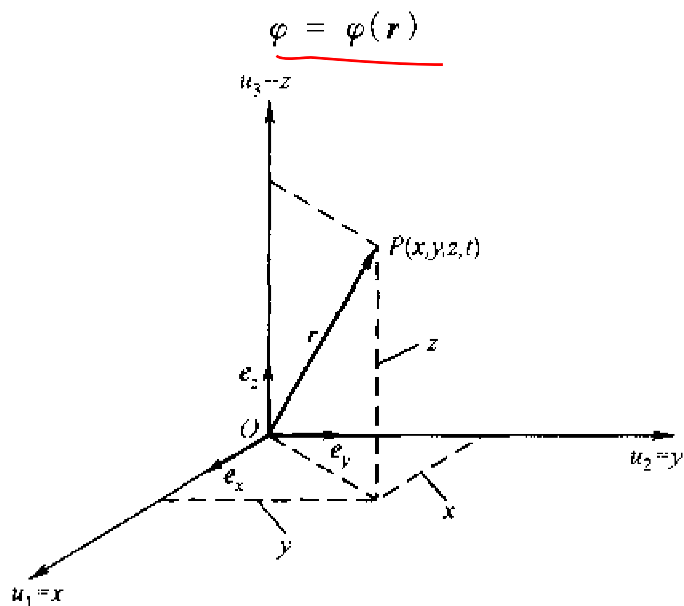



图1-1 直角坐标系

2. 矢量：不仅具有大小，而且具有方向特征的量。矢量的空间分布构成矢量场，如电场（时变电场）

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$
$$= E(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{e}_E$$

其中 $E$ 为矢量 $\boldsymbol{E}$ 的模；$\boldsymbol{e}_E$ 则为表征矢量 $\boldsymbol{E}$ 方向的单位矢量。以直角坐标系为例，按矢量 $\boldsymbol{E}$ 在三个相互垂直的坐标轴上的分量（$E_x, E_y, E_z$）之和的形式，可将电场强度矢量函数展开为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{e}_y E_y(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{e}_z E_z(\boldsymbol{r},t) \tag{1-11}$$

由此可得该矢量 $\boldsymbol{E}$ 的模为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \tag{1-12}$$

而其单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_E = \frac{\boldsymbol{E}}{E} = \boldsymbol{e}_x \frac{E_x}{E} + \boldsymbol{e}_y \frac{E_y}{E} + \boldsymbol{e}_z \frac{E_z}{E} \tag{1-13}$$
$$= \boldsymbol{e}_x \cos\alpha + \boldsymbol{e}_y \cos\beta + \boldsymbol{e}_z \cos\gamma$$

式中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向余弦；$\alpha$、$\beta$ 和 $\gamma$ 分别是 $\boldsymbol{E}$ 与 $x$、$y$ 和 $z$ 轴正向的夹角。若电场 $\boldsymbol{E}$ 与时间无关，即得静态电场的数学描述为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

对应于标量函数的代数运算，矢量函数的代数运算亦有加、减和乘积的基本运算规则。矢量的加减法运算在几何上可直观表示为熟识的“平行四边形”的运算法则。对于电磁场理论的学习，归属于矢量乘积运算的标量积和矢量积是必须掌握的基本知识。

1. 标量积（或点积）：两矢量的标量积定义为一数量，等于两矢量之模和其间夹角余弦值三者的连乘积，即

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta_{AB} \tag{1-14}$$

式中角 $\theta_{AB}$ 是两矢量间的夹角。

力学上，标量积可看作由力作功引出的数学概念，因为力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{S}$ 上所作的功

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} = FS\cos\theta_{FS}$$

按标量积定义，显然，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A^2$，而当两个矢量互相垂直时，其标量积为零。结合直角坐标系中的矢量表示式，还可推出

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1-15}$$

2. 矢量积（或叉积）：两矢量的矢量积定义为一矢量，其大小等于以相乘两矢量为边所形成的平行四边形的面积；其方向垂直于此平行四边形，指向符合右手定则。也就是按相乘两矢量先后序，右手四指从 $\boldsymbol{A}$ 旋转到 $\boldsymbol{B}$，大拇指方向

为 $e_C$ 的方向，即

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = AB\sin(\theta_{AB})\boldsymbol{e}_C \tag{1-16}$$

式中角 $\theta_{AB}$是两矢量间的夹角。图 1-2 是矢量积 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 的图解说明。

力学上，矢量积可看作由力矩引出的数学概念。如图 1-3 所示，力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴 $O$ 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 可用矢量积表示为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是转轴 $O$ 到力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 $P$ 的矢径，其方向由 $O$ 指向作用点 $P$。

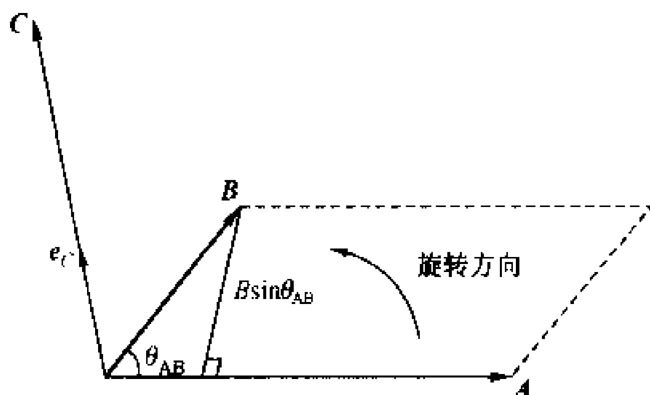



图 1-2 矢量积的图示

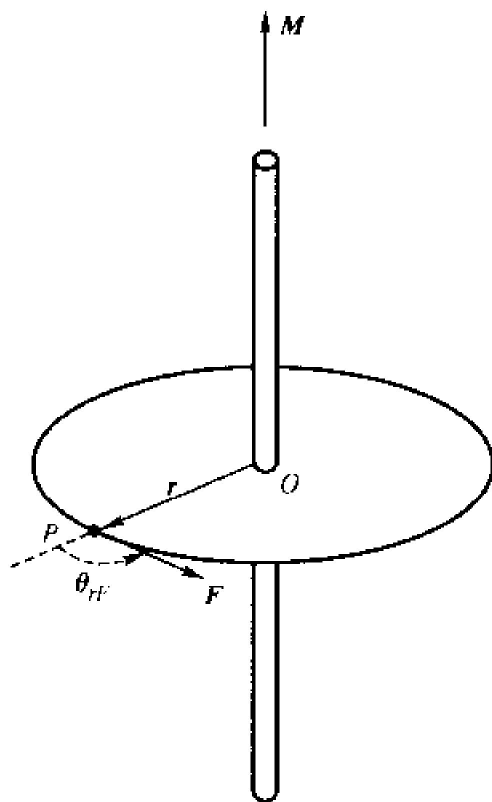



图 1-3 力矩 $\boldsymbol{M}$ 的图示

### 1.2.2 坐标系统

电磁场问题的求解常需引入具体的坐标系统，特别是在结合工程问题的分析或设计时更是如此。鉴于电磁场的规律性并不随坐标系的选择而变化，因此坐标系的实际选取可完全取决于解题的需要，如按场源、媒质分布在几何结构上数学描述的需要等选取坐标系。常用的正交坐标系统有直角坐标系$(x,y,z)$、圆柱坐标系$(\rho,\phi,z)$和球坐标系$(r,\theta,\phi)$。这三种正交坐标系的图示，以及对应于矢量微积分运算中空间微分元(元长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$、元面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 和元体积 $\mathrm{d}V$)的关系式等，均列于附录一中。

### 1.2.3 矢量积分

场论中涉及的空间积分主要有形如$\int_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$的线积分和$\int_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$的面积分。

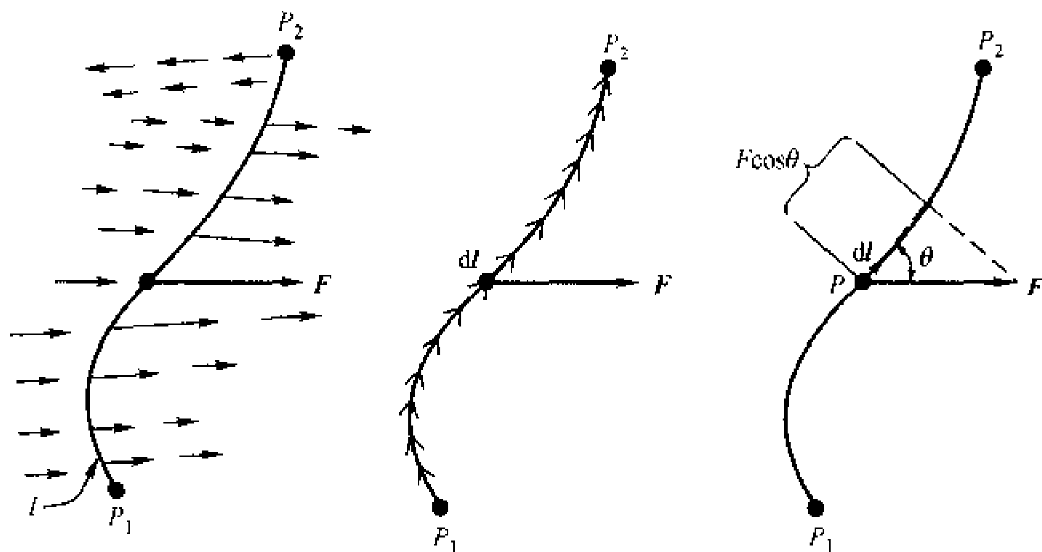
1. 线积分$\int_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

在功和能的计算中广泛应用这类标量线积分，根据矢量标量积运算，应有

$$\int_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_l F\mathrm{d}l\cos\theta \tag{1-17}$$

上式所示积分是在路径 $l$ 上求取标量积$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$的和，如图 1-4 所示。由图可见，在该路径的每一场点上，只有 $\boldsymbol{F}$ 沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向的投影才对积分有贡献。根据标量积关系[参照式(1-15)]，式(1-17)的积分运算在直角坐标系下还可写成

$$\begin{aligned}\int_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_l F_x\mathrm{d}x + \int_l F_y\mathrm{d}y + \int_l F_z\mathrm{d}z \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F_x\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} F_y\mathrm{d}y + \int_{z_1}^{z_2} F_z\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{1-18}$$




(a) 场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$空间中的路径 $l$　(b) 路径 $l$ 由元长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 集合构成　(c) 在典型场点 $P$ 上的标量积$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

图 1-4　线积分$\int_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$的图示

式中已计入路径 $l$ 的两个端点的坐标，设分别为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$。应该指出，式(1-17)所示的线积分值通常取决于路径 $l$ 的形状，这时 $\boldsymbol{F}$ 称为非守恒场；若线积分值与所取路径 $l$ 的形状无关时，则称 $\boldsymbol{F}$ 为守恒场(如静态电场)。

2. 环量$\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

设 $l$ 为力场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$中一条封闭的有向曲线(即取定了正方向,以切线矢量 $\boldsymbol{t}$ 表征其正向的曲线),现考察一质点 $P$ 在场力$\boldsymbol{F}$ 作用下,沿 $l$ 正向移动一周所作的功。

如图 1-5 所示,当质点在弧元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上运动时,场力 $\boldsymbol{F}$ 所作元功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

故质点$P$ 沿闭合曲线$l$ 环行一周,场力 $\boldsymbol{F}$ 作功是

$$W = \oint_l \mathrm{d}W = \oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

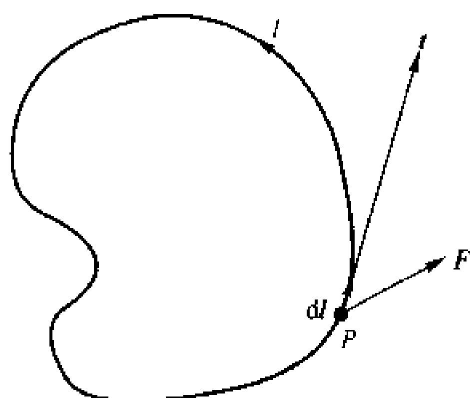


图 1-5 环量$\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的图示

这类闭合线积分在其他矢量场中也都有一定的物理意义,如流速场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$中,当流水中存在旋涡时,该处水的质点环绕涡心旋转。显然,此时,水的流速 $\boldsymbol{v}$ 环绕旋涡的闭合线积分 $\oint_l \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 就不为零。可以理解,欲衡量旋涡处水流旋转的缓急,就可利用这个闭合线积分值的大小来表征。因此该闭合线积分常称为环流或环量。

场论中定义矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$沿一条闭合的有向曲线 $l$ 的线积分

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿该曲线在所取方向上的环量,可用来表示具有旋涡特性的源强度,例如上述流速场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$特性的描述;又如在时变电磁场中,把感应场强 $\boldsymbol{E}_i$ 的环量定义为感应电动势 $e(= \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l})$,以描述电磁感应现象。

在直角坐标系中,由式(1-18)可知,环量的一般表达式为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \oint_l (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z) \end{aligned} \tag{1-19}$$

3. 通量$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

当研究流速场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$中流量时,将涉及$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 通量的计算。设如图 1-6 所示,在流速场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$中引入一假想的有向曲面 $\boldsymbol{S}$(记 $\boldsymbol{e}_n$ 为曲面 $S$ 的法线方向单位

矢量，以 $e_n$ 指向为正侧）。现分析在单位时间内流体向正侧穿过 $S$ 面的流量。在 $S$ 面上截取面元 $dS$，因为 $dS$ 甚小，其上任一点处的流速 $v$ 可看作是相同的。现经 $\Delta t$ 时间后，随着流速的方向 $dS$ 将移至 $dS'$ 位置，因此在 $\Delta t$ 时间内穿过面元 $dS$ 的流量（为简化分析，设流体密度为 1）

$$\Delta M = 1 \cdot \Delta V$$
$$= 1 \cdot \boldsymbol{v}\Delta t \cdot \boldsymbol{e}_n dS$$

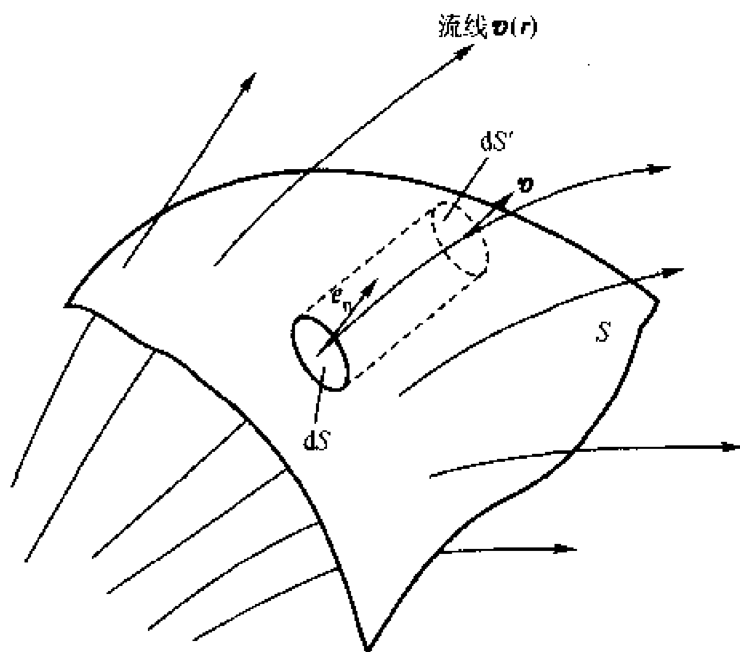



图 1-6　流量 $\int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$ 的图示

而单位时间内流体穿过面元 $dS$ 的流量

$$dQ = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n dS = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

由此在单位时间内流体向正侧穿过 $S$ 面的流量为

$$Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S v_n dS$$

结合以上关于流量的典型问题的讨论，场论中定义矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 沿某一有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的曲面积分

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 向正侧穿过该有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的通量。如在磁场中，定义穿过任意有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的通量，称为磁通 $\Phi(=\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S})$。

在直角坐标系中，由附录一并参照式(1-15)，通量的一般表达式为

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (F_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z + F_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y) \tag{1-20}$$

如果 $S$ 是一个闭合面，则

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示 $\boldsymbol{F}$ 穿过闭合面的通量。若 $\Psi>0$，表示有净通量流出，这说明闭合面 $S$ 内必定有产生流线(通量线)$\boldsymbol{F}$ 的"源"；若 $\Psi<0$，表示有净通量流入，说明 $S$ 内有吸收流线(通量线)$\boldsymbol{F}$ 的"汇"。如以静电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 为所论的矢量场，则由第二章中的高斯定理可知，这时该场中 $\boldsymbol{E}$ 通量( $\Psi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$) 所对应的"源"或"汇"显然分别是相应的正电荷或负电荷。

### 1.2.4 标量场的梯度

以静态位场 $\varphi(x,y,z)$ 为例，研究场在空间的分布情况，必然要寻求描述该标量场的空间变化率的方法。这要涉及场函数 $\varphi$ 对三个空间坐标变量的偏导数，而且由于沿不同方向的变化率可能有所不同，因此，为了确定在任一场点上标量场的空间变化率，最终将归结为一个矢量的表述。

标量场的分布可以形象地应用等值面来描绘。等值面方程为

$$\varphi(x,y,z) = C \tag{1-21}$$

式中 $C$ 是常数。取决于不同的 $C$ 值，可获得一系列等值面，从而直观地描绘了该标量场 $\varphi$ 的空间分布状态(如气象图上的等压线，地形图上的等高线等)。如图 1-7 所示，图示了场中两个分别取值为 $\varphi_1$ 和 $\varphi_1+\mathrm{d}\varphi$ 的等值面。首先，对位于等值面 $\varphi_1$ 上的场点 $P$，研究标量场 $\varphi(x,y,z)$ 在该点沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向的变化率，此即方向导数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-22}$$

很明显，方向导数值与所选取的方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 有关。记该 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_l$，可知

$$\boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{e}_x\cos\alpha + \boldsymbol{e}_y\cos\beta + \boldsymbol{e}_z\cos\gamma \tag{1-23}$$

其次，将式(1-22)中的$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$、$\frac{\partial \varphi}{\partial y}$和$\frac{\partial \varphi}{\partial z}$看作为另一向量 $\boldsymbol{G}$ 的三个直角坐标分量，

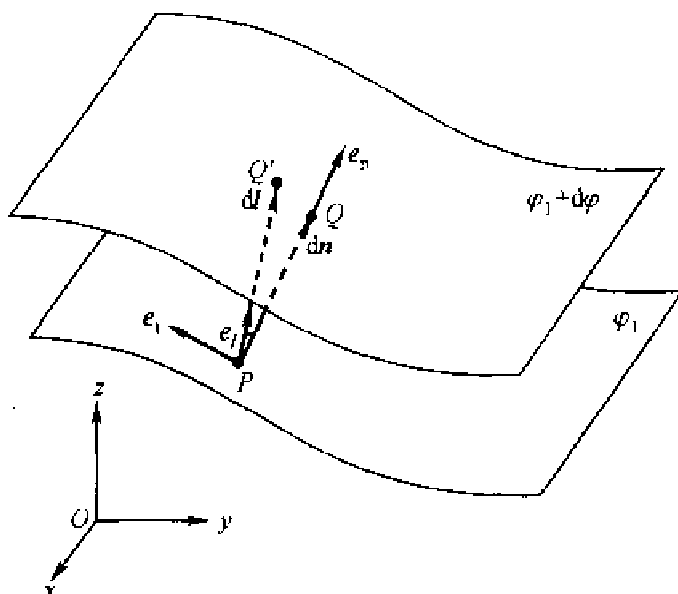



图 1－7　标量场梯度的图示

即令

$$G = e_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{1-24}$$

这样,方向导数式(1－22)可改写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= G \cdot e_l \\ &= G\cos(\widehat{G, e_l}) \end{aligned} \tag{1-25}$$

上式表明 $G$ 在 $e_l$ 方向上的投影恰为场函数 $\varphi$ 在该方向上的方向导数。依此,显然,当方向 $e_l$ 和 $G$ 的方向一致时,即 $\cos(\widehat{G, e_l}) = 1$ 时,方向导数取得最大值,其值为 $(\partial\varphi/\partial l)_{\max} = G$,而 $G$ 的方向就是取得最大方向导数($\varphi$ 的变化率最大)的方向。由此,把 $G$ 称作场函数 $\varphi(r)$ 在给定点处的梯度,记作

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\ \varphi &= G \\ &= e_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \tag{1-26}$$

其模值

$$|\mathbf{grad}\ \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \tag{1-27}$$

结合图 1－7 可见,在过 $P$ 点的切平面内,沿任何方向的场函数 $\varphi$ 的空间变化率均等于零,即按式(1－25)沿过 $P$ 点的切向单位矢量 $e_t$ 方向,应有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= |\mathbf{grad}\ \varphi| \cos(\widehat{\mathbf{grad}\ \varphi, e_t}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以必有

$$\cos(\mathbf{grad}\ \varphi \widehat{,} e_l) = 0$$

上式惟当 $\mathbf{grad}\ \varphi$ 的方向垂直于等值面 $\varphi_1$ 时才成立。因此可以判定，标量场中任一场点处的梯度 $\mathbf{grad}\ \varphi$ 为一矢量，它的方向垂直于过该场点的等值面，取法线 $e_n$ 方向，如图 1－7 所示。同时，又因沿梯度方向的方向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = |\mathbf{grad}\ \varphi| \cdot 1 > 0$，故场函数 $\varphi$ 是沿梯度方向递增的。换句话说，梯度指向场函数 $\varphi$ 增加的方向。

在矢量分析中，为简洁起见，习惯上引入算子 $\nabla$（读作"del"或"nabla"），它是一个矢量形式的微分算子，即

$$\nabla \equiv e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1-28}$$

因此，标量场 $\varphi$ 的梯度也简记为

$$\nabla \varphi = \mathbf{grad}\ \varphi \tag{1-29}$$

### 1.2.5 矢量场的散度

为考察通量"源"在场中各点的分布情况，及其强、弱程度，必须讨论 1.2.3 节所论通量 $\int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在指定场点处的极限值，这就引出了矢量场中散度的概念。

设在矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 中某一场点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处，作包围该点的一相当小的封闭曲面 $S$（以 $\Delta V$ 表示其所限定的体积，以 $\Delta \Psi$ 表示从该 $S$ 面内穿出的通量），则当 $\Delta V \to 0$ 时，即 $\Delta V$ 收缩为 $P$ 点时，定义通量 $\Delta \Psi$ 对于体积 $\Delta V$ 的变化率的极限值，称为矢量 $\boldsymbol{F}$ 在 $P$ 点的散度，记作

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}V} \tag{1-30}$$

根据上述定义可知，散度 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{F}$ 为一标量点函数，它描述了矢量场 $\boldsymbol{F}$ 中给定点的通量密度，亦即该点场源的变化方式。若 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{F} = 0$，则表明该点处的通量线是连续的；若 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{F} > 0$，则表明该点有发出通量线的"源"（正源）；若 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{F} < 0$，则表明该点有汇集通量线的"汇"（负源）。这样，散度概念的引入起到了检测通量源的作用，也就是说，由此可以分析这类场源的分布情况。

矢量场的散度值与所选择的坐标系无关，但若以该矢量的分量表示该矢量的散度时，则具体数学表达式与坐标系的选取有关。以下推导在直角坐标系中 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{F}$ 的表达式。

由散度定义可知，div $\boldsymbol{F}$ 与所取微体积形状无关。不失讨论的一般性，取包围所论点 $P$ 的微体积 $\Delta V$ 为一直平行六面体，如图 1－8 所示。从而通量 $\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 归结为计算穿出该直平行六面体每个表面通量的总和。因为在计及每个表面通量时，都只有一个方向上的通量密度（$F_x$ 或 $F_y$，$F_z$）起作用。又因该平行六面体很小，每一个平面上的通量密度值都可看作为相应的常量。故以垂直于 $x$ 轴方向的两侧面上通量密度的计算为例，基于在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处泰勒级数的展开式，前、后侧面处的通量密度应分别是：

$$
\begin{aligned}
F_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right) &= F_x(x_0,y_0,z_0)+\Delta F_x \\
&\approx F_x(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0}\cdot\frac{\Delta x}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right) &= F_x(x_0,y_0,z_0)-\Delta F_x \\
&\approx F_x(x_0,y_0,z_0)-\left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0}\cdot\frac{\Delta x}{2}
\end{aligned}
$$

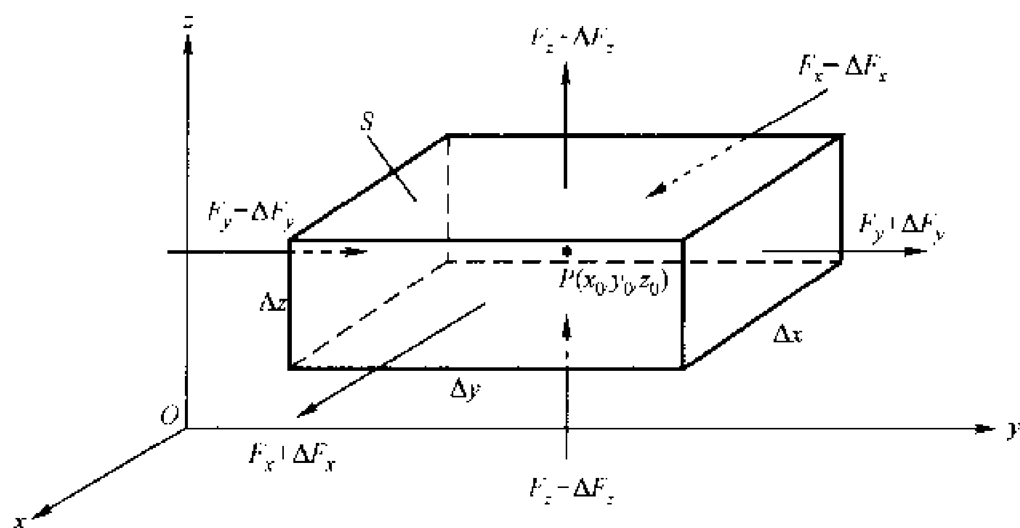



图1－8　直角坐标系下 div $\boldsymbol{F}$ 表达式的推导用图

在以上两式中略去了包含因子 $\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2$、$\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3$ 等的高次项。因而穿出这两个面的净通量值为

$$
\left[F_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)-F_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)\right]\Delta y\Delta z=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z
$$

同理，对于另二组侧面进行类同的分析计算，即可得穿过整个平行六面体的净通量

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

而 $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$，所以根据定义式(1－30)，在直角坐标系下散度的表达式为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1－31}$$

由上式可见，散度由场矢量的空间导数组成，它是场矢量 $\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴上投影沿各自坐标方向的变化率之和，是一标量。

应用算子 $\nabla$，则 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ 可记为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \operatorname{div}\boldsymbol{F} \tag{1－32}$$

### 1.2.6 矢量场的旋度

1.2.3 节所讨论的环量只能反映出大范围的情况，即表征的是闭合曲线 $l$ 所包围的总的旋涡源强度，而并不能判断这种源的分布特性。为了描述这种产生旋涡特性的源的分布特性，设围绕所论矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 的场点 $P$，作一条围定面积为 $\Delta S$ 的微小的有向曲线 $l$，令 $\boldsymbol{e}_n$ 为 $\Delta S$ 的法向单位矢量，它与有向曲线 $l$ 构成右螺旋关系，如图 1－9 所示。则极限 $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}/\Delta S$ 被称为该场矢量 $\boldsymbol{F}$ 对于方向 $\boldsymbol{e}_n$ 的环量强度。十分明显，在给定点处这一环量强度的大小与 $\Delta S(\Delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_n\Delta S)$ 的取向相关，现取点 $P$ 处环量强度的最大值作为衡量、检测"旋涡源"的依据，并定义为该点矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度，记作

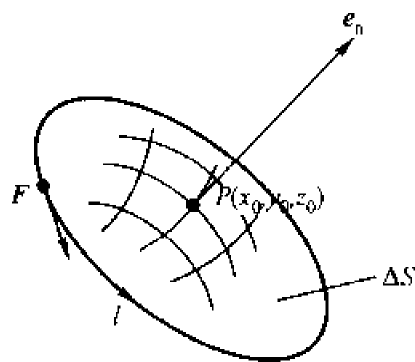


图 1－9　环量强度的图示

$$\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\left.\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right|_{\max}}{\Delta S}\cdot \boldsymbol{e}_n \tag{1－33}$$

由上式可见，矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度是一个矢量，其方向和环量积分路径循行的方向满足右螺旋定则，且为获得最大环量位置的面积元的法线方向 $\boldsymbol{e}_n$；其大小表征了每单位面积上 $\boldsymbol{F}$ 的最大环量。因此旋度描述了旋涡源的强度。在不存在旋涡源的无源区，旋度必然为零。下面来推导直角坐标系中旋度的具体运算式。

由旋度定义可知，因为所求环量强度这一极限值与所取面元 $\Delta S$ 的形状无关，为简便起见，今围绕点 $P(x_0,y_0,0)$ 在 $xOy$ 平面上作一个很小的矩形积分回

路，如图1－10所示。沿该回路场量 $\boldsymbol{F}$ 的环量

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_1}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{l_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{l_3}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{l_4}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=F_{x1}\Delta x+F_{y2}\Delta y+F_{x3}(-\Delta x)+F_{y4}(-\Delta y)$$

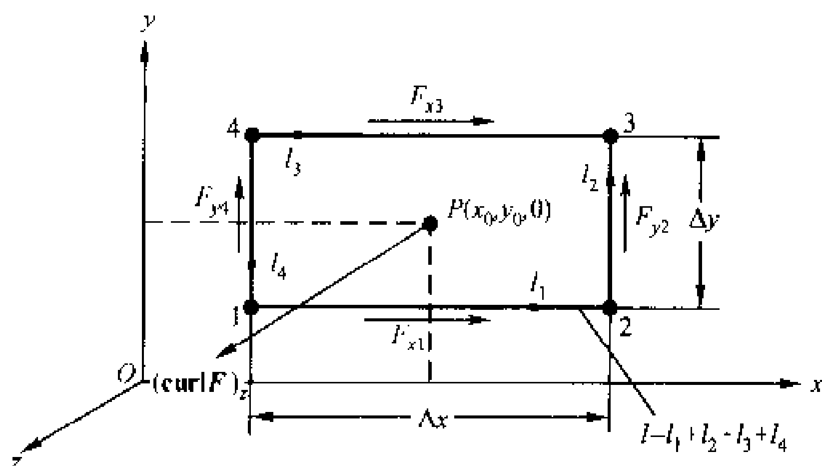



图1－10　直角坐标系下$(\mathbf{curl}\ \boldsymbol{F})_z$表达式的推导用图

式中场量在各段线元上的分量近似取为常量，且等于相应线元中点上的场量值。又因为线元 $\Delta x$、$\Delta y$ 很小，应用泰勒级数展开式，可得

$$F_{x1}\approx F_x(x_0,y_0)-\left.\frac{\partial F_x}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\cdot\frac{\Delta y}{2}$$

同理：

$$F_{y2}\approx F_y(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F_y}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\cdot\frac{\Delta x}{2}$$

$$F_{x3}\approx F_x(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F_x}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\cdot\frac{\Delta y}{2}$$

$$F_{y4}\approx F_y(x_0,y_0)-\left.\frac{\partial F_y}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\cdot\frac{\Delta x}{2}$$

代入环量计算式，稍加整理即有

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

由此根据旋度的定义式(1－33)，应有

$$(\mathbf{curl}\ \boldsymbol{F})_z=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta x\Delta y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\qquad(1-34)$$

当面元 $\Delta S$ 分别转换到 $yOz$ 和 $xOz$ 平面内时，同理可得$(\mathbf{curl}\ \boldsymbol{F})_x$与$(\mathbf{curl}\ \boldsymbol{F})_y$的计算式(只需将指标 $x$、$y$、$z$ 依次作相应置换即得)。然后，合成为一个矢量式，便得在三维空间的直角坐标系中，矢量函数 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为

$$\text{curl}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x(\text{curl}\ \boldsymbol{F})_x + \boldsymbol{e}_y(\text{curl}\ \boldsymbol{F})_y + \boldsymbol{e}_z(\text{curl}\ \boldsymbol{F})_z$$
$$= \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{1-35}$$

或写成便于记忆的行列式，即

$$\text{curl}\ \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1-36}$$

引用算子$\nabla$，考虑到矢量积关系式，则 curl $\boldsymbol{F}$ 可记作

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \text{curl}\ \boldsymbol{F} \tag{1-37}$$

## 1.3 场论基础

在矢量分析的基础上，为研究包括电磁场在内的各种物理场的特性，其中规律性的认识被进一步概括为数学上场论的基本内容。以下根据本课程的内容，阐述了场论中有关的基本定理。

### 1.3.1 散 度 定 理

对于任一闭合面 $S$ 包围的空间总可划分为两个区域，它们的表面分别为闭合面 $S_1$ 和 $S_2$，如图 1-11 所示。由于对闭合面 $S_1$ 和 $S_2$ 来说，其相邻部分表面（公共面）的外法线方向恰好相反。因此，分别通过 $S_1$ 和 $S_2$ 的通量之和就等于矢量 $\boldsymbol{F}$ 通过闭合面 $S$ 的通量。由此可以推论，因为 $S$ 包围的体积 $V$ 可被认为是由很多体积元 $\Delta V_j(j=1,\cdots,n)$ 所组成，故通过 $S$ 面的通量应等于包围各个 $\Delta V_j$ 的闭合面 $S_j$ 通量之和，即

$$\lim_{\Delta V_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\oint_{S_j}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\right)\right] = \oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-38}$$

而根据散度的定义式(1-30)，对于很小的由闭合面 $S_j$ 所包围的体积元 $\Delta V_j$ 而言，应有

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_j\Delta V_j = \oint_{S_j}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-39}$$

现在把所有体积元对上式两边的贡献叠加，便得

$$\lim_{\Delta V_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{n}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_j\Delta V_j\right] = \lim_{\Delta V_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\oint_{S_j}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\right)\right] \tag{1-40}$$

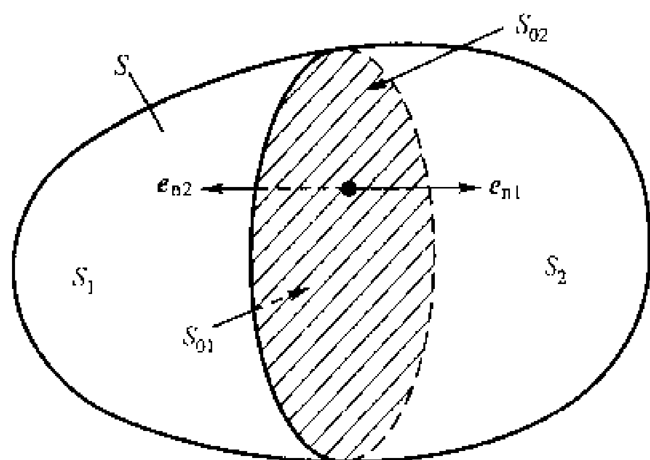



图 1－11　关于散度定理

根据式(1－38)所示的基本关系,以及对上式左边运用体积分定义,则式(1－40)即可表示成

$$\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \mathrm{d}V \qquad (1-41)$$

式中 $S$ 为包围体积 $V$ 的外表面。上式称为散度定理(也称为高斯定理)。在数学意义上,应用散度定理可以将矢量函数的面积分转化为标量函数的体积分,或反之。从物理上场的观点理解,高斯定理建立了某一空间中的场与包围该空间的边界场之间的关系。

## 1.3.2　斯托克斯定理

对于任一条闭合曲线 $l$ 包围的区域总可划分为两个部分,它们的周界分别为 $l_1$ 和 $l_2$,如图 1－12 所示。由于对闭合曲线 $l_1$ 和 $l_2$ 来说,其相邻部分(公共线段)的走向相反,因此矢量 $\boldsymbol{F}$ 沿着 $l$ 的环量 $\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 等于分别沿着 $l_1$ 和 $l_2$ 的环量之和。由此可以推论,因为 $l$ 包围的面积 S 可被认为是由很多面元 $\Delta S_j$($j = 1, \cdots, n$)所组成,故沿着 $l$ 的环量应等于沿着包围各个 $\Delta S_j$ 的围线 $l_j$ 的环量之总和,即

$$\lim_{\Delta S_j \to 0} \left[ \sum_{j=1}^{n} \left( \oint_{l_j} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \right) \right] = \oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (1-42)$$

而根据旋度的定义式(1－33),对于很小的被围线 $l_j$ 包围的面元 $\Delta S_j$ 而言,应有

$$(\nabla \times \boldsymbol{F})_j \cdot \Delta \boldsymbol{S}_j = \oint_{l_j} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (1-43)$$

上式左边是矢量 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 穿过面积 $\Delta \boldsymbol{S}_j$ 的通量,把所有面元对通量的贡献叠加,

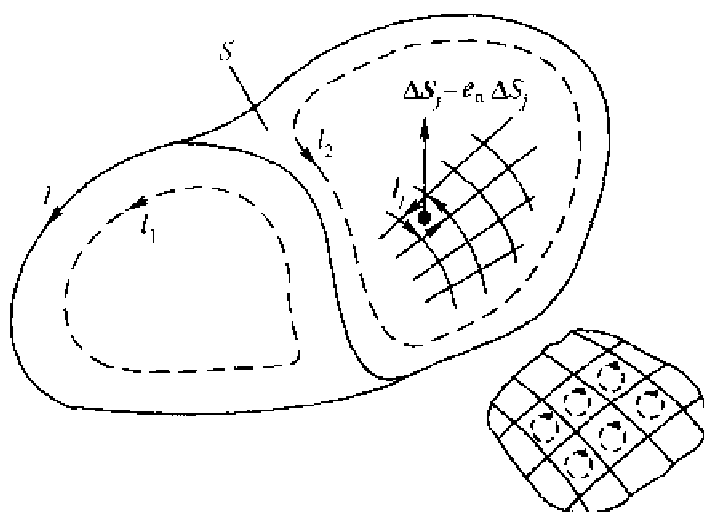



图 1-12 关于斯托克斯定理

便得

$$\lim_{\Delta S_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{n}(\nabla \times F)_j \cdot \Delta S_j\right] = \int_S (\nabla \times F) \cdot dS \qquad (1-44)$$

根据式(1-43)所示的基本关系,由式(1-42)和(1-44)的结合,即得斯托克斯定理

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \oint_l F \cdot dl \qquad (1-45)$$

式中 $S$ 为围线 $l$ 所包围的面积;$dS$ 方向与 $dl$ 方向构成右旋关系。在数学意义上,应用斯托克斯定理可以将矢量旋度的面积分变换为该矢量的线积分,或反之。从物理上场的观点理解,斯托克斯定理建立了场域中某一区域的场与该区域边缘上场量之间的关系。

### 1.3.3 无散场与无旋场

由矢量分析定义的矢量场的散度和旋度分别描述了产生矢量场的两种源,即发出或吸收通量线的散度源和产生旋涡场的旋度源。因此,在任何无界的物理场空间内,散度和旋度不可能同时都处处为零,但是,散度或旋度处处为零的场则是客观存在的。通常,散度处处为零的矢量场称为无散场;旋度处处为零的矢量场称为无旋场。

1. 无旋场

在矢量分析中,一个重要的恒等式是

$$\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0 \qquad (1-46)$$

该式表明，任一标量场 $\varphi$ 的梯度的旋度恒等于零。为了证明此恒等式成立，可在矢量场中任取一个有向曲面 $\boldsymbol{S}$，将式(1-46)对此曲面进行面积分，则由斯托克斯定理可知，其结果等于 $\nabla\varphi$ 沿界定该曲面的围线 $l$ 的线积分，即

$$\int_S [\nabla \times (\nabla\varphi)] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l (\nabla\varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由梯度与方向导数的关系式(1-25)，可得

$$\oint_l (\nabla\varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l (\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{e}_l \mathrm{d}l = \oint_l \frac{\partial\varphi}{\partial l}\mathrm{d}l = 0$$

因此
$$\int_S [\nabla \times (\nabla\varphi)] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

由于有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 是任意选取的，因此上式表明被积函数必然为零，即恒等式(1-46)必然成立。

恒等式(1-46)的物理意义可表述为，任一无旋场一定可以表示为一个标量场的梯度，或者说，任何梯度场一定是无旋场。正如第二章中的论述，由于静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的旋度处处为零，静电场为无旋场，因此，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可以表示为标量电位 $\varphi$ 的梯度，通常令 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$；反之，由标量电位 $\varphi$ 的梯度构成的梯度场 $\boldsymbol{E}$，其旋度必然处处为零。

2．无散场

在矢量分析中，另一个重要的恒等式是

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \equiv 0 \tag{1-47}$$

该式表明，任一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度的散度恒等于零。为了证明此恒等式成立，可在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中任取一个由闭合面 $S$ 所包围的体积 $V$，将式(1-47)对体积 $V$ 进行体积分，则由散度定理可得

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}V = \oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-48}$$

现将闭合面 $S$ 借助位于其表面上的一条闭合的有向曲线 $l$ 分割成两个开放的有向曲面 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$，如图 1-13 所示。由此应用斯托克斯定律，分别得：

$$\int_{S_1} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

和
$$\int_{S_2} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = -\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

上述第二式右端的负号起因于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$ 的方向构成左旋关系。将以

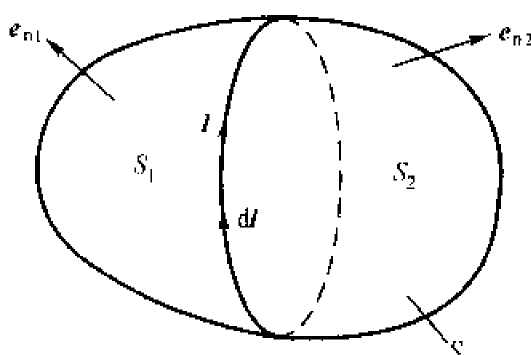



图 1-13　式(1-47)证明的图示

上结果代入式(1-48)的右端，即有

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_1} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \int_{S_2} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = 0$$

由此得知

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = 0$$

由于体积 $V$ 是任取的，因此上式表明被积函数必然为零，即恒等式(1-47)必然成立。

恒等式(1-47)的物理意义可表述为，任一无散场可以表示为另一矢量场的旋度，或者说，任何旋度场一定是无散场。正如第三章的论述，由于恒定磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的散度处处为零，恒定磁场是一个无散场，因此，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可以表示为矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，即 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$；反之，由矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度构成的旋度场 $\boldsymbol{B}$，其散度必然处处为零。

### 1.3.4 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理表明，若矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 在无界空间中处处单值，且其导数连续有界，源分布在有限区域 $V'$ 中，则该矢量场惟一地由其散度和旋度所确定，且可被表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，即

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{1-49}$$

式中

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \tag{1-50}$$

和

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \tag{1-51}$$

其中 $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 是源点($\boldsymbol{r}'$)到场点($\boldsymbol{r}$)的距离；算子 $\nabla' \equiv \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$ 是对源点坐标进行运算的；积分也对源点坐标展开。

亥姆霍兹定理在数学上可以给出严格的证明*。这里将限于对定理的内涵作一简证如下：

假设在无界空间中有两个矢量函数 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$，它们有相同的散度和旋度，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{G} \tag{1-52}$$

---

* 可参阅参考书目[10]§1-11节。

和

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{G} \tag{1-53}$$

若令

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{g} \tag{1-54}$$

并对上式取散度,得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{G} + \nabla \cdot \boldsymbol{g}$$

由式(1-52)可知

$$\nabla \cdot \boldsymbol{g} = 0 \tag{1-55}$$

再对式(1-54)取旋度,有

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{G} + \nabla \times \boldsymbol{g}$$

于是,由式(1-53)可知

$$\nabla \times \boldsymbol{g} = 0 \tag{1-56}$$

基于1.3.3节的讨论,由矢量恒等式(1-46),可令

$$\boldsymbol{g} = \nabla\varphi \tag{1-57}$$

代入式(1-55)有

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 z} = 0 \tag{1-58}$$

上式给出的二阶偏微分方程即是拉普拉斯方程。对于由拉普拉斯方程定义的场(简称为拉普拉斯场),场内函数值不会出现极值*,而如今 $\varphi$ 是在无界空间内取值的函数,因此只能是一常数:$\varphi = C$,从而必有 $\boldsymbol{g} = \nabla\varphi = 0$,于是式(1-54)即是

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \tag{1-59}$$

由此得证,给定已知矢量的散度和旋度,也就惟一地决定了该矢量场。

应该指出,矢量场的散度和旋度特性是研究矢量场的首要问题,这是以后讨论各种电磁场的共同出发点。同时,式(1-50)和(1-51)具体给出了场量与其散度源和旋度源之间的定量关系,也将是今后总体讨论的基础。此外,由式(1-49)—(1-51)可见,对于无界空间,当所论矢量场的散度和旋度均为零时,即 $\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$,则矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 也随之消失。因此,无散且无旋的矢量场[即满足式(1-58)定义的拉普拉斯场(也称为调和场)]在无界空间中是不存在的,由以后分析可知,它只可能存在于局部的无源区域之中。

---

* 若在场域内假设某处存在有极大值或极小值的话,则在该处 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ 为零,且对于极大值,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}$、$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y}$ 全为负值;而对于极小值,它们全为正值。显然,这样就不能满足 $\nabla^2\varphi = 0$。

## 1.4 电磁场的基本规律——麦克斯韦方程组

引言中已经概括电磁现象研究和电磁场理论建立的历史过程。本节将围绕麦克斯韦就法拉第电磁感应定律所提出的感应电场的概念,以及为扩充电流概念而提出的位移电流假设,阐述 1865 年麦克斯韦所提出的电磁场的基本方程组。该方程组既适用于时变电磁场,也适用于静态电磁场,是宏观电磁现象基本规律的科学总结,奠定了宏观电磁理论的基础。

鉴于在承接物理电磁学课程内容的基础上,本节的目的在于深化对电磁感应定律和全电流概念的理解,为本课程学习提供必需的数学物理基础,故在此不专题展开有关电磁感应现象和全电流概念的实际应用问题的讨论,而将在以后各章的相关阐述中予以结合。

### 1.4.1 电磁感应定律

1831 年法拉第通过实验观察到,随时间变化的磁场在围绕它的线圈回路中引起电流;同样,与线圈有相对运动的恒定磁场,也会在线圈中引起电流。由此可见,当穿过闭合导电回路的磁通量 $\Phi$ 发生变化时,回路中就产生感应电流。也就是说,在该回路中存在有推动电荷运动的力,但这种力显然不同于电荷产生的电场力,而是源于磁场的变化。因此,对应于法拉第实验所观察到的感应电流,回路中一定存在着某种电动势。这种由于磁通量变化而引起的电动势被称为感应电动势 $e$。感应电动势比感应电流更能反映电磁感应现象的本质,因为往后分析可见,即使导体回路不闭合,或在任一假想的闭合回路情况下,也会发生电磁感应现象,这时并没有感应电流,但感应电动势依然存在。此外,感应电流的大小取决于回路的阻抗,而感应电动势的大小则与回路的阻抗无关。

法拉第总结了电磁感应现象的规律性,指出:导体回路中感应电动势 $e$ 的大小与穿过回路的磁通随时间的变化率成正比,即

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (1-60)$$

在这一法拉第电磁感应定律的数学表达式中,$S$ 为由回路 $l$ 所界定的任意曲面,且已规定有关物理量的参考方向,即沿回路 $l$ 的感应电动势 $e$ 的参考方向与穿过该回路的磁通 $\Phi$ 的参考方向成右螺旋关系。这样,在选定以上参考方向的前提下,式(1-60)的表述符合楞次定律。也就是说,闭合回路中的感应电动势及其所产生的感应电流总是企图阻止与回路相交链的磁通的变化。

综合电磁感应现象,引起式(1-60)所示回路中磁通变化的原因不外乎有以

下三类情况：

1. 磁场不随时间变化(恒定磁场)，导电回路 $l$ 或部分导电回路和磁场有相对运动。这时产生的感应电动势起源于非静电场力的洛伦兹力，被称作动生电动势。如图 1-14 所示，在恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，若矩形闭合导体回路 $l$ 的一条边 $ab$

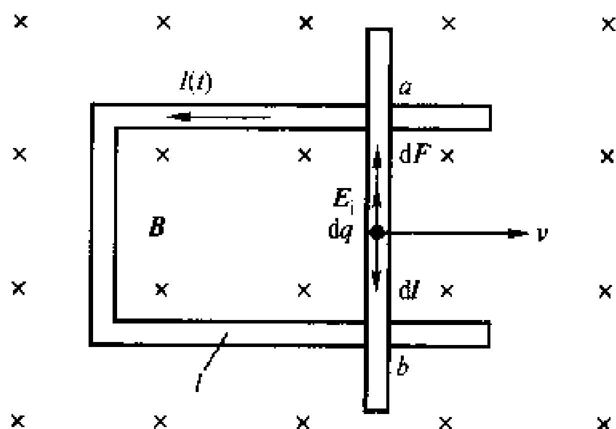



图 1-14　动生电动势与洛伦兹力

可平行于自身以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于磁场滑动，则该运动导线 $ab$ 中的自由电荷 $\mathrm{d}q$ 将受洛伦兹力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$[式(1-7)]作用，而形成感应电流 $I(t)$。类同于后 3.1.2 节所述，基于电磁感应作用，可定义感应电动势为感应场强 $\boldsymbol{E}_i$ 的环量，即

$$e = \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

而感应场强

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

从而式(1-60)可表示为

$$e = \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-61}$$

上式表征了发电机的工作原理，因此工程上也称这种由相对运动引起的感应电动势为发电机电动势。

2. 磁场随时间变化，但回路 $l$ 静止不动。这时产生的感应电动势称作感生电动势，工程上也称为变压器电动势。由于回路 $l$ 对于磁场无相对运动，式(1-60)中对时间 $t$ 的全导数可改写成时间 $t$ 的偏导数，即

$$e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})$$

$$= -\int_S \left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial(\mathrm{d}\boldsymbol{S})}{\partial t}\right]$$

$$= -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-62}$$

3. 既有磁场随时间的变化，又有回路的相对运动。这时根据法拉第电磁感应定律[式(1-60)]，与回路相交链的磁通 $\Phi$ 对时间 $t$ 的全导数，可如同式(1-62)推导过程中表述的那样展开为两项，即

$$e = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} - \int_S \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial(d\boldsymbol{S})}{\partial t} \tag{1-63}$$

式中，第一项相当于回路不动磁场随时间变化所提供的沿回路 $l$ 的感应电动势；第二项则是磁场不变而回路 $l$ 相对于磁场运动所引起的附加感应电动势。现就第二项的物理意义讨论如下。

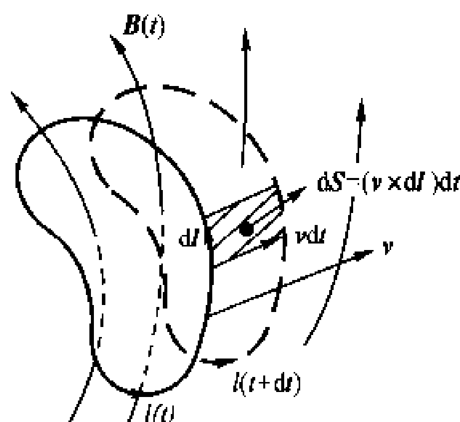



图 1-15 在时变磁场中以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的导体回路 $l$

设一界定任意曲面的闭合回路 $l$ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于磁场 $\boldsymbol{B}(t)$ 运动(图 1-15)。在时间 $dt$ 内，回线 $l$ 的每一个长度元 $d\boldsymbol{l}$ 所扫过的面积 $d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l})dt$，所以

$$\frac{\partial(d\boldsymbol{S})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l})dt$$

$$= \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l}$$

因为 $\boldsymbol{v}$ 是对应于时间 $dt$ 的速度，而 $d\boldsymbol{l}$ 是一个固定量。回代至式(1-63)中的第二项，并利用附录二中恒等式(1)，便得

$$-\int_S \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial(d\boldsymbol{S})}{\partial t} = -\oint_l \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l})$$

$$= \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}$$

由此可知，第二项的物理意义即是前述的动生电动势。因而由式(1-63)表征的合成的感应电动势为

$$e = \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} + \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1-64}$$

显然，在物理意义上，这表明在此情况下的电磁感应现象是前两种情况下效应的叠加。此外，需着重指出的是，表述法拉第电磁感应定律的式(1-60)和(1-64)是等效的，对于给定的感应电动势问题的分析，两式将提供同一的解答。

前已指出，在闭合导电回路中，因电磁感应现象产生感应电流意味着导线中存在推动电荷运动的感应电场 $\boldsymbol{E}_i$，它起因于磁场的变化，而与构成导电回路的材料特性无关。麦克斯韦将电磁感应定律推广到场域空间的任一假想闭合回路的情况，提出了“涡旋电场”的假设，即只要与该回路相交链的磁通发生变化，即

使没有感应电流产生，但在该回路中的任一点总有感应电场* 存在，因而沿任一闭合回路都会产生感应电动势。这一关于变化的磁场将产生电场的科学论断已为大量实验所证实。

根据以上分析，可知产生电场的场源有两种：电荷和变化的磁场。在一般情况下，两种场源共同激励产生的合成电场

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_q \tag{1-65}$$

式中由电荷产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}_q$，称为库仑场。根据第二章中的分析可知，库仑场是无旋场（$\nabla \times \boldsymbol{E}_q = 0$ 或也可表为环量 $\oint_l \boldsymbol{E}_q \cdot d\boldsymbol{l} = 0$）。因此，对式(1-65)两边沿某一闭合回路 $l$ 取其线积分，应有

$$\begin{aligned}\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = e \\ &= -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} + \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= -\frac{d\Phi}{dt}\end{aligned} \tag{1-66}$$

由此可见，源于感应电场的有旋性，合成电场为涡旋场。对于静止媒质（$\boldsymbol{v} = 0$），则有

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-67}$$

上式称为麦克斯韦第二方程（积分形式），它表明电场不仅由电荷产生，而且也可由随时间变化的磁场所产生。例如，电子感应加速器（$\beta$ 加速器）即可被看作为这一方程物理含义最生动的实验例证。该工程装置就是利用迅变的空间磁场产生强大的涡旋状感应电场，藉以对电子不断加速，使之获得能量可达数百万电子伏特的电子束（$\beta$ 射线），打击在靶子上，激励出能量较高的 $x$ 射线，用于核物理研究、工业探伤和癌症治疗等。

应用斯托克斯定理［式(1-45)］于式(1-67)，可得

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$$

式中两个面积分是对同一表面 $S$ 求积，并考虑到 $S$ 的随意性，因此

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-68}$$

这就是电磁感应定律（麦克斯韦第二方程）的微分形式。

---

* 感应电场有别于电荷产生的库仑电场，因其有旋性又称涡旋电场，而旋涡源就是磁通的变化量。

## 1.4.2 全电流定律

为寻求在普遍情况下相互协调一致的电磁规律,麦克斯韦在将法拉第电磁感应定律推广成式(1-67)所示的电场环路定律后,发现安培环路定律在时变电流应用的情况下会出现矛盾。为了解决这一矛盾,麦克斯韦于 1861 年提出了“位移电流”假设。下面来分析基于这一假设,如何得以修正安培环路定律,使之适用于时变场这一普遍情况,从而揭示了变化的电场可以产生磁场,构成电磁场统一体的另一侧面的电磁规律性。

由物理电磁学已知在恒定磁场中的安培环路定律

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-69}$$

该定律表明,磁场强度沿任一闭合回路的线积分等于穿过该回路所限定面积的传导电流的代数和。对式(1-69)应用斯托克斯定理,可得

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_c \tag{1-70}$$

这就是安培环路定律的微分形式,由此可见磁场是有旋场。对上式两边取散度,由式(1-47)可知,$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} \equiv 0$,所以有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = 0 \tag{1-71}$$

式(1-71)即是静态场中传导电流连续性方程的微分形式。这表明,安培环路定律成立的前提是传导电流连续。然而,传导电流和自由电荷之间的关系,受制于电荷守恒定律,即

$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} \tag{1-72}$$

上式表明,在单位时间内通过闭合面向外流出的电流,应等于此闭合面内单位时间所减少的电荷。应用散度定理[式(1-41)]于式(1-72),便得

$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c)\mathrm{d}V = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

因此,在静止媒质情况下,电荷守恒定律的微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1-73}$$

将上式与式(1-71)相比较,可见式(1-71)仅为其特例。式(1-73)表明,在时变条件下,单是传导电流并不能满足由电荷守恒定律所描述的电流连续性的物理内涵。换句话说,安培环路定律必须加以修正才能应用于时变场。

麦克斯韦认为静电场的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \tag{1-74}$$

可以推广应用于时变场。对式(1－74)应用散度定理,可得

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\mathrm{d}V = q$$

$$= \int_V \rho \mathrm{d}V$$

因此,高斯定理的微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-75}$$

将上式代入电荷守恒定律[式(1－73)],得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

或写成

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1-76}$$

将式(1－76)与式(1－71)相对照,可见如果有一电流密度 $\boldsymbol{J}$,它是 $\boldsymbol{J}_c$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 之和,即 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$,则 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$,即与之相应的电流是连续的,这样

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-77}$$

必然成立。由此表明,如果产生磁场的电流不仅是传导电流,而且还有麦克斯韦所称的位移电流[其电流密度为 $\boldsymbol{J}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$(单位:$\mathrm{A/m^2}$)],则安培环路定律即可推广应用于时变场。式(1－77)便是在麦克斯韦"位移电流"假设的基础上,经修正后的安培环路定律的微分形式。

将式(1－77)两边取面积分,且应用斯托克斯定理,有

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-78}$$

此外,若计及另一类由空间中运动电荷形成的所谓运流电流[其电流密度为 $\boldsymbol{J}_v = \rho \boldsymbol{v}$(单位:$\mathrm{A/m^2}$)],它也可产生磁场,则式(1－78)还可进而写成

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-79}$$

式(1－79)中计及所有可能产生磁场 $\boldsymbol{H}$ 的电流,所以称之为全电流定律。显然,恒定磁场中的安培环路定律[式(1－69)]是时变场中全电流定律的特殊形式。式(1－79)亦称为麦克斯韦第一方程(积分形式),它表明磁场不仅由运动的电荷

产生，而且也可由随时间变化的电场所产生。

鉴于在空间任一点上，$J_c$ 与 $J_D$ 或 $J_v$ 与 $J_D$ 可能同时存在，然而，由于 $J_c$ 和 $J_v$ 存在的物质条件不同(前者存在于导电媒质，后者则存在于真空、惰性气体等空间之中)，两者不可能在空间同一点上共存。因此，在引入位移电流扩充电流概念后，全电流密度 $J$ 应记作

$$J = \left.\begin{matrix} J_c \\ J_v \end{matrix}\right\} + J_D = \left.\begin{matrix} \gamma E \\ \rho v \end{matrix}\right\} + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (1-80)$$

从而在式(1-77)基础上，与式(1-79)对应的全电流定律(麦克斯韦第一方程)的微分形式为

$$\nabla \times H = \left.\begin{matrix} J_c \\ J_v \end{matrix}\right\} + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (1-81)$$

在时变场情况下，按式(1-76)，并计及可能存在的运流电流密度 $J_v$，电流连续性方程的微分形式可表达为

$$\nabla \cdot J = 0 \qquad (1-82)$$

由散度定义[式(1-30)]可知，与式(1-82)等价的电流连续性方程的积分形式为

$$\oint_S J \cdot dS = 0 \qquad (1-83)$$

式(1-82)和(1-83)表明，在引入与变化的电场相应的位移电流概念后，由传导电流或运流电流和位移电流相结合形成的全电流才是连续的。由此可以对电容器充放电、元天线激励等典型时变问题的电磁过程作出科学的解释。事实上，在位移电流假设的基础上由麦克斯韦方程所阐明的电磁现象的规律性，都已得到实验证实，其中 1886 年电磁波的实验发现，及其广泛的应用更为麦克斯韦假设提供了最有力的证据。

### 1.4.3 麦克斯韦方程组

前面已分别阐述了麦克斯韦关于涡旋电场和位移电流的假设，从而揭示了电场和磁场之间既对称又统一的内在联系——存在变化电场的空间必存在变化的磁场；存在变化磁场的空间也必存在变化的电场。这就是说，时变电场和时变磁场永远是相互依存又相互制约，组成一个统一的电磁场整体。麦克斯韦以精辟的数学语言将这一宏观电磁现象的规律性归结为如下的四个方程，合称为麦

克斯韦方程组,其积分形式为:

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{J}_c\cdot d\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}+\int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}^* \tag{1-84a}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-84b}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{1-84c}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho dV \tag{1-84d}$$

式(1-84a)和式(1-84b)分别是前述的全电流定律[式(1-79)]和推广的电磁感应定律[式(1-67)]。式(1-84c)是源于恒定磁场的磁通连续性原理,说明磁场线是无头无尾的闭合曲线。同样,式(1-84d)源于静电场中的高斯定理,说明电场线是起自于"源"(正电荷),而终止于"汇"(负电荷)的有向曲线。以上两式均经麦克斯韦推广,应用于时变场。

由式(1-81)和(1-68),并依据散度定义,即可得出与式(1-84a)—(1-84d)相应的麦克斯韦方程组的微分形式为:

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\left.\begin{matrix}\boldsymbol{J}_c\\ \boldsymbol{J}_v\end{matrix}\right\}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-85a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-85b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-85c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1-85d}$$

在前已明确阐述麦克斯韦方程组各方程物理意义的基础上,基于亥姆霍兹定理,从矢量场的散度和旋度特性出发,可以继续在数学和物理相结合的意义上对麦克斯韦方程组给出所论时变电磁场特性的全面描述。由微分形式的麦克斯韦方程组[式(1-85a)—(1-85d)]可见,时变电磁场的时变电场是有旋有散的,也就是说,除了作为散度源的时变电荷外,变化的磁场也是时变电场的旋度源;时变磁场是有旋无散的,这表明传导电流(或运流电流)与变化的电场是其旋度源。但是,两个旋度方程[式(1-85a)和(1-85b)]所显示的时变电场和时变磁场互为因果的关联性,表明时变电磁场的电场和磁场又是不可分割的,因此,时变电磁场是有旋有散场。应指出,在电荷与电流都不存在的无源区中,时变电磁场是有旋无散的,此时,自行闭合的电场线与磁场线相互交链、激发,从而形成由近及远地向周围空间传播的电磁波。此外,基于旋度的定义,由式(1-85a)和

---

* 在往后各章展述中,未考虑空间运动电荷所伴随的运流电流效应。

(1－85b)可见，时变电场的方向与时变磁场的方向处处相互垂直。

为了完整地描述时变电磁场的特性，尚需列入表明电荷及电流关系的电荷守恒定律[式(1－73)]，现将其重写如下

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1-86}$$

同时，还应给出表明场量与媒质特性关系的如下媒质的构成方程，即：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1-87}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1-88}$$

$$\boldsymbol{J}_c = \gamma \boldsymbol{E} \tag{1-89}$$

应该指出，麦克斯韦方程组的四个方程式[式(1－85a)—(1－85d)]是相容的，但并非是完全独立的。实际上，式(1－85c)和(1－85d)的两个散度方程可利用电荷守恒定律[式(1－86)]直接从式(1－85a)和(1－85b)的两个旋度方程导出。例如，对式(1－85a)两边取散度，得

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J}_c + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

将式(1－86)代入上式，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho) = 0$$

即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho = 常数$$

考虑到 $t=0$ 时，不失一般性，可令 $\boldsymbol{D}=0$，$\rho=0$，因此上式中常数应为零。这样，即可得出式(1－85d)。

当给定场源分布由麦克斯韦方程组求解时变电磁场时，待求的四个基本场矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$(其中每个矢量都对应有三个分量)共包含了十二个未知量，而确定这十二个未知量就需要十二个标量方程。这十二个标量方程可由两个旋度方程和两个矢量的构成方程[式(1－87)和(1－88)]所提供，其中每个矢量方程等价于三个标量方程。

麦克斯韦方程组奠定了宏观电磁理论的基础，随着本课程内容学习的不断深入，对其深刻的含义必然会有进一步的认识。诚如相对论奠基人——爱因斯坦(A. Einstein，1879—1955)在他所著的“物理学演变”一书中关于麦克斯韦方程的评述：“这个方程的提出是牛顿时代以来物理学上的一个重要事件。它是关于场的定量数学描述，方程所包含的意义比我们指出的要丰富得多。在简单的形式下隐藏着深奥的内容，这些内容只有仔细的研究才能显示出来。方程是表示场的结构的定律。它不像牛顿定律那样，把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是把此处的现在的场与最邻近的刚过去的场发生联系。假使我们已知此处的现在所发生的事件，藉助这些方程便可预测在空间稍为远一些，在时间上稍为迟一些所发生的事件。”

# 第 2 章

# 静态电磁场Ⅰ：静电场

本章基于第一章给出的数学物理基础知识，按演绎法，首先对静态电磁场中单一的电场效应，即静电场，在总结其基本规律性的基础上，研究静电场中源－场关系。在分别对自由空间和电介质中的静电场问题循序渐进地展开讨论之中，突出了对典型问题和与工程应用密切联系的电场问题的分析，因此，对应于源－场关系的场分布的研究，镜像法与边值问题的论述是本章的重点所在。在掌握场分布解答的基础上，本章继续讨论了工程电磁场问题所关注的电容、部分电容参数，静电能量及其能量密度，以及静电力等问题，并给出了相应的计算方法与计算关系式。

## 2.1 基本方程与场的特性

当电磁场中的源量（电荷或电流）不随时间而变化时，例如，相对于观察者，电荷处于静止状态或以恒定速度运动，且其电量不随时间而变化，这时，场中的场量也将不随时间变化而仅是空间坐标的函数。因而麦克斯韦方程组可简化为：

积分形式：

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2-1a}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2-1b}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2-1c}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2-1d}$$

微分形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_c \tag{2-2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2-2b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2-2c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{2-2d}$$

由以上方程组可见，式(2－1b)、(2－1d)和式(2－2b)、(2－2d)中只含有电场效应，其场量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ 仅与源量 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 相联系。对应地，式(2－1a)、(2－1c)和式(2－2a)、(2－2c)中只含有磁场效应，其场量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 仅与源量 $\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')$ 相联系。这表明电场和磁场之间没有相互耦合的关系，可以在单一的电场或单一的磁场效应下分别进行分析和讨论。由于此时电场或磁场的源量与场量都不随时间而变化，故统称为静态场。本章专题讨论归属静态电场的静电场问题。

静电场系由相对于观察者为静止的，且其电量不随时间而变化的电荷所激发，是一类在真空或存在导体和电介质媒质情况下产生的静态电场。在下一章中还将讨论由恒定电流激发的电场效应，这将归属为另一类静态电场问题。

### 2.1.1 静电场的基本方程

综上所述，描述静电场基本规律性的数学模型，应归结为：

积分形式：

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2-3a}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2-3b}$$

微分形式：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{2-4a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2-4b}$$

其媒质的构成方程为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{2-5}$$

对于理想化的真空（自由空间）状态，可以看作是理想的电介质，此时式(2－5)中的介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_0$。

亥姆霍兹定理指出，无界空间矢量场惟一地由其散度和旋度所确定，场的散度和旋度是研究场特性的首要问题。现考察以上基本方程(2－4a)和(2－4b)，显然，静电场具有有散（有源）、无旋场的基本特征，由此即可着手讨论静电场基本场量 $\boldsymbol{E}$ 的散度和旋度特性，从而得出系统地分析研究静电场问题的方法和实际应用原理等。

### 2.1.2 真空中的高斯定理·静电场的有散性

真空中静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与源量 $q$ 间的关系，可由基本方程(2－3a)得出为

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\int_V \rho \mathrm{d}V}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2-6}$$

上式称为真空中的高斯定理。定理表明，在真空中，通过任一闭合曲面 $S$ 的电场强度通量(电通量)，等于该曲面所包围的电量除以真空的介电常数 $\varepsilon_0$。由于高斯定理作为静电场基本规律性的一个方面的描述，建立了场量与源量间的关系，因此，如同 2.2 节的讨论，式(2-6)也是应用于静电场典型问题分析计算的一种基本方法。

式(2-6)是真空中高斯定理的积分形式，它表征了电场强度在某一大范围尺寸的场空间中的特性。为了精确地反映场中任一点的特性，必须给出相应的微分形式的表述，即由基本方程(2-4a)可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2-7}$$

上式称为真空中高斯定理的微分形式。该式表明，真空中电场强度在任一场点上的散度等于该点的电荷体密度除以真空的介电常数 $\varepsilon_0$。

静电场是有散(有源)场，有散度的场具有 1.2.5 节所描述的通量源场的性质。如图 2-1 所示，若场中某点 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} > 0$，则 $\rho > 0$(正电荷)，该点有电通量线，即电场线向外发散，且为“源”的所在处；若某点 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} < 0$，则 $\rho < 0$(负电荷)，即有电场线从周围向该点汇集，是“汇”的所在处；若某点的 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，则 $\rho = 0$(无电荷)，电场线既不自该点发出，也不向该点汇集，而是通过该点，因此该点不存在场源。

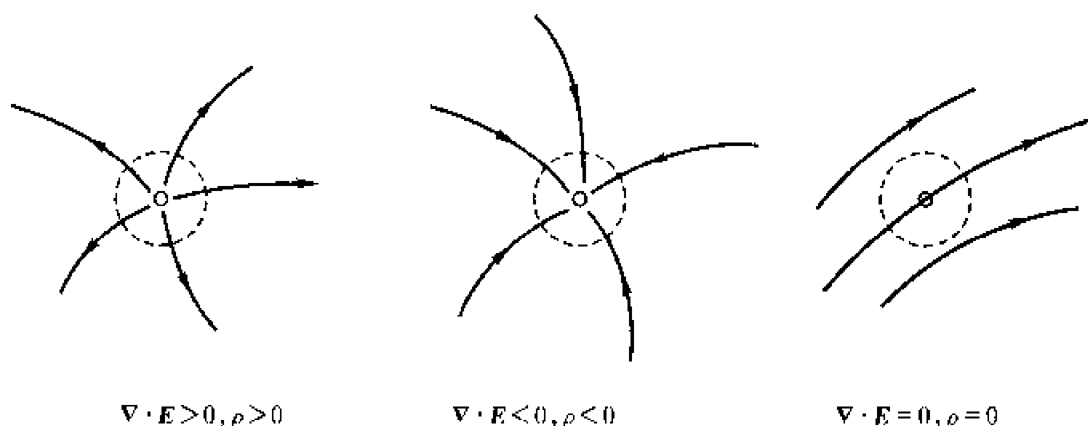



图 2-1 散度与场源的关系

**例 2-1** 已知真空中在半径为 $a$ 的球形空间内分布有呈球对称形态的电荷，它在其球形分布区域内外产生的空间电场分别为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{r}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r (r \leqslant a)$ 和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r (r > a)$。试求该电荷分布。

［解］ 根据高斯定理[式(2－7)]，并按题设场强 $\boldsymbol{E}$ 的分布特征[$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=E_r\boldsymbol{e}_r$]，应在球坐标系中展开散度表达式(见附录二)。因题设 $E=E_r$，$E_\theta=E_\phi=0$，故有

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{2E_r}{r}\right)$$

$$=\begin{cases}1/r & (0<r\leqslant a)\\ 0 & (r>a)\end{cases}$$

可见，在半径为 $a$ 的球形空间内，该电荷以电荷体密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 分布形式，反比于球心距呈球对称形态，而在球形空间外，$\rho(\boldsymbol{r}')=0$ 应为意料之中的结果。

### 2.1.3 静电场的无旋性

基本方程(2－3b)表明，静电场中，电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合路径的线积分恒等于零，亦即电场强度矢量的环量恒等于零。设在图 2－2 中沿某一闭合回路 AmBnA 对电场强度 $\boldsymbol{E}$ 取线积分有

$$\oint_{\text{AmBnA}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\text{AmB}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{\text{BnA}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

由此可得

$$\int_{\text{AmB}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{\text{BnA}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\text{AnB}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad(2-8)$$

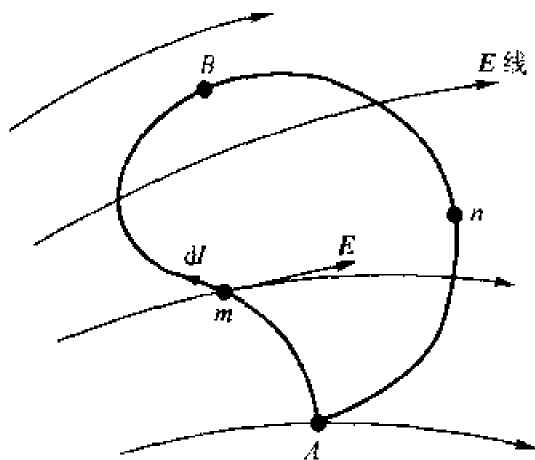



图 2－2 电场力作功与路径无关

根据 $\boldsymbol{E}$ 的定义式(1－6)可知，上式的积分关系表示电场把单位正电荷从 $A$ 点移至 $B$ 点所作的功，而且该电场力作的功与路径无关，仅取决于起点和终点的位置。因此，与重力场相仿，式(2－3b)和式(2－8)都表明静电场的功或能是守恒的。也就是说，静电场是保守力场，或位场。

与以上静电场中 $\boldsymbol{E}$ 矢量的环量恒等于零相对应的点特性的描述，归结为基

本方程(2-3b)的微分形式——式(2-4b),即$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$。该式表明,静电场的电场强度矢量$\boldsymbol{E}$的旋度处处为零,静电场是无旋场,静电场的电场线不可能是闭合曲线。

**例2-2** 试求由例2-1所给定的该静电场的旋度。

[**解**] 根据基本方程(2-4b),同前理,应利用球坐标系下的旋度表达式(见附录二)。由于电场强度$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$仅有$E_r$分量,且$E_r$与坐标变量$\theta$、$\phi$无关,因此在整个场空间中应有

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\phi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

显然,这是静电场无旋性的必然结论。

## 2.2 自由空间中的电场

对于自由空间中的静电场问题,分析研究的首要任务是在给定源量的作用下求其基本场量——电场强度$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的空间分布,也就是通常所称的场分布问题。在静电场的基本方程已经描述基本场量$\boldsymbol{E}$的散度和旋度特性的基础上,本节将具体讨论自由空间中已知源量$q(\boldsymbol{r}')$分布求解场量$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$空间分布的分析计算方法,并给出相应的计算关系式。同时,由于静电场的特性表明,静电场是位场,可以引入标量电位函数$\varphi(\boldsymbol{r})$,作为辅助场量来描述静电场的特征,因此,也将给出以$\varphi(\boldsymbol{r})$为待求量分析计算场分布的具体方法。

### 2.2.1 自由空间中的$\boldsymbol{E}$和$\varphi$

当自由空间中静电场的散度和旋度分别由基本方程(2-7)和(2-4b)确定后,即$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$和$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$,则根据亥姆霍兹定理,按式(1-49),电场强度$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$应为

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{2-9}
$$

同样,按式(1-50)和(1-51)可知,上式中:

$$
\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'
$$

和

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'
$$

式中$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$,以及源区$V'$和$\mathrm{d}V'$含义如图2-3所示。将已确定的散度和旋度

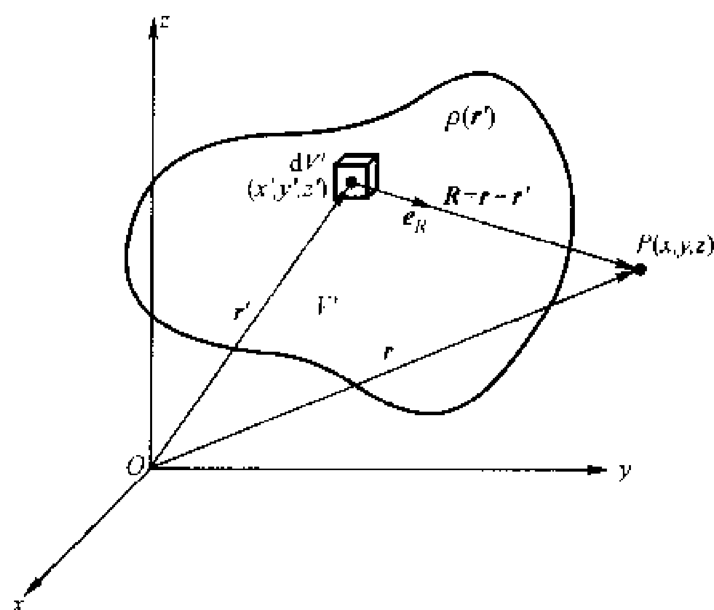



图 2-3 求 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的示意图

分别代入 $\varphi(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$表达式,即得

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{2-10}$$

和

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2-11}$$

于是由式(2-9)可知,电场强度

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2-12}$$

式中标量函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$对于静态电场来说通常称为标量电位函数,或简称电位。因此式(2-12)表明,自由空间中任一点静电场电场强度 $\boldsymbol{E}$ 等于该点电位梯度的负值。由 1.3.3 节已知,一个无旋矢量场总可以表示为一个标量场的梯度。由于静电场是无旋场,因此由亥姆霍兹定理推得式(2-12)的成立,再次证实了前述的这一结论。

由此可见,若已知电荷分布函数 $\rho(\boldsymbol{r}')$,根据式(2-10)可求出空间任一点的电位 $\varphi(\boldsymbol{r})$,然后,由式(2-12)所示的微分运算便可计算该点的电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$。因此,式(2-12)是由电位函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$求电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的关系式,它表征了描述同一电场特性的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\varphi$ 联系的一个方面。为完整地描述 $\boldsymbol{E}$ 和 $\varphi$ 的关系,现根据静电场的特性,通过阐明所引入的电位函数的物理意义,来得出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\varphi$ 联系的另一侧面的描述,即由 $\boldsymbol{E}$ 求 $\varphi$ 的关系式。

2.1.3 节已经阐明静电场是位场,根据式(2-8)可知,沿任意路径将电荷 $q$ 由 $P$ 点移至 $Q$ 点时,电场力所作的功为

$$W = q\int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

将式(2-12)代入上式，且考虑到方向导数式(1-25)，应有

$$W = -q\int_P^Q (\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{e}_l)\mathrm{d}l = -q\int_P^Q \frac{\partial\varphi}{\partial l}\mathrm{d}l = q(\varphi_P - \varphi_Q)$$

由此

$$U_{PQ} = \varphi_P - \varphi_Q = \frac{W}{q} \qquad (2-13)$$

上式表明，静电场中 $P$ 和 $Q$ 两点间的电位差(即电压 $U_{PQ}$)定义为从 $P$ 到 $Q$ 点移动单位正电荷时电场力所作的功。从该定义出发可知，讨论某一点的绝对电位如同讨论相量的绝对相位或地理位置中的绝对高度一样，是不确切的。为此，必须选定电位的参考点，如取 $Q$ 点为电位参考点，则 $P$ 点的电位定义为

$$\varphi_P = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (\text{单位:V}) \qquad (2-14)$$

$\varphi_P$ 也可称为 $P$ 点相对于 $Q$ 点的电位。原则上，参考点 $Q$ 的选择是任意的，但一经选定，空间中的电位函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$分布即被惟一确定，因而可被看作为辅助场量用来表征静电场的特性。参考点的电位显然为

$$\varphi_Q = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

在工程电磁场分析中，常取大地表面为电位参考点。而在理论分析时，只要产生电场的全部场源都位于有限的空间区域内，则不论电荷分布的形态与位置，由式(2-10)可见，电位值与观察距离 $R$ 的一次方成反比，因此，无限远处的电位值为零，可以选取无限远处为电位参考点，从而对电位的计算将带来很大的方便。所以在理论分析时，任意点 $P$ 的电位可设为

$$\varphi_P = \int_P^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (\text{单位:V}) \qquad (2-15)$$

综上所述，式(2-14)、(2-15)即是由 $\boldsymbol{E}$ 求 $\varphi$ 的关系式，它是对应于式(2-12)的逆运算的必然结果。

### 2.2.2 场分布：基于场量 $\boldsymbol{E}$ 的分析

将式(2-10)直接代入式(2-12)中，得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$= -\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \mathrm{d}V' \tag{2-16}$$

因为，如图 2－3 所示，$R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$，而 $\nabla$ 是作用于场点坐标$(x,y,z)$的矢量形式的微分算子[式(1－28)]，因此有

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$= -\frac{1}{R^3}[(x-x')\boldsymbol{e}_x + (y-y')\boldsymbol{e}_y + (z-z')\boldsymbol{e}_z]$$

所以

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{2-17}$$

将式(2－17)代入式(2－16)中，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2} \boldsymbol{e}_R \mathrm{d}V' \end{aligned} \tag{2-18}$$

上式是在给定一般的电荷体密度函数 $\rho(\boldsymbol{r}')$条件下，直接计算场中电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的基本关系式。对应于 1.1.1 节所给出的各种理想化的电荷分布形态，注意到元电荷 $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V' = \sigma \mathrm{d}S' = \tau \mathrm{d}l'$，根据式(2－18)，可以写出自由空间中由面电荷 $\sigma(\boldsymbol{r}')$和线电荷 $\tau(\boldsymbol{r}')$分布所产生的电场强度分别为：

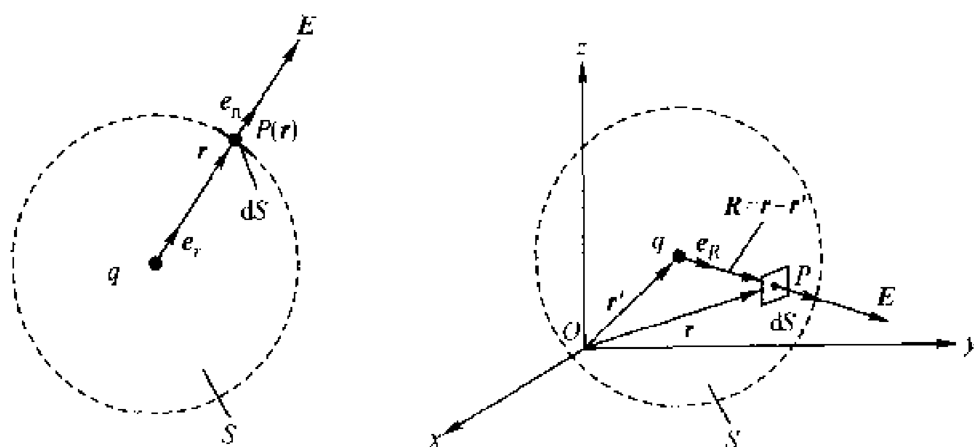
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{R^2} \boldsymbol{e}_R \mathrm{d}S' \tag{2-19}$$

和

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'} \frac{\tau(\boldsymbol{r}')}{R^2} \boldsymbol{e}_R \mathrm{d}l' \tag{2-20}$$

在无界自由空间中，位于坐标原点的单个点电荷 $q$ 在相距 $r$ 远处引起的电场强度，可以利用真空中的高斯定理求得。如图 2－4(a)所示，由于点电荷的结构具有球对称特点，因此当点电荷位于球坐标原点时，它所产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 一定与球坐标的方位角 $\theta$ 和 $\phi$ 无关，电场线呈辐射状。这样，以点电荷为中心，作一个半径为 $r$ 的球面 $S$，则球面上各点的电场强度方向处处为径向，且强度相同。由高斯定理[式(2－6)]，按所取的闭合曲面 $S$(习惯上专称为高斯面)，得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S$$
$$= \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S$$




(a) 位于原点的点电荷 $q(>0)$　　　　(b) 不在原点的点电荷 $q(>0)$

图 2－4　点电荷的电场强度

$$= E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

因此
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

以完善的矢量形式表示，即为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2-21}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为由源点（点电荷）指向场点的单位矢量。该式为静电学中重要的基本公式，它也可由静电的基本实验定律——库仑定律出发，按式(1－6)导得。容易验证，由式(2－21)所给定的 $\boldsymbol{E}$ 满足基本方程(2－4b)。

若点电荷 $q$ 所在处的坐标为($\boldsymbol{r}'$)，则结合图 2－4(b)可见，它在场点 $P(\boldsymbol{r})$ 所引起的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R \tag{2-22}$$

对于无界自由空间中的点电荷系统[设该系统有 $n$ 个点电荷 $q_1$、$q_2$、…、$q_k$、…、$q_n$，分别位于($\boldsymbol{r}'_1$)、($\boldsymbol{r}'_2$)、…、($\boldsymbol{r}'_k$)、…、($\boldsymbol{r}'_n$)]，应用叠加原理，任一场点($\boldsymbol{r}$)处合成的电场强度可求得为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{E}_1 + \cdots + \boldsymbol{E}_k + \cdots + \boldsymbol{E}_n \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_k|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_k|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{R_k^2}\boldsymbol{e}_{R_k}\end{aligned} \tag{2-23}$$

以上由式(2－18)—(2－23)给出了基于电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$，已知电荷分布求

场分布的计算关系式。对于一类具有一定对称性的静电场问题，直接运用自由空间中的高斯定理计算其电场强度分布，将是一种十分简便的方法。此外，若按2.2.3节，由电荷分布求得场中电位 $\varphi$ 分布后，再按式(2-12)的微分运算求其场强 $\boldsymbol{E}$ 的分布，则因涉及的积分运算为标量积分，远比直接应用矢量积分关系求 $\boldsymbol{E}$ 要简便得多，从而这样的处理方法在场分布分析中得到广泛的应用，这也正是在静电场问题分析中引入位函数 $\varphi$ 的意义所在。

**例 2-3** 真空中有限长直线段 $l$ 上均匀分布有电荷线密度为 $\tau$ 的电荷，如图 2-5 所示。求线外中垂面上任意场点 $P$ 处的电场强度。

**[解]** 根据结构的旋转对称性，本例具有轴对称场* 的特征。为此，采用圆柱坐标系，令 $z$ 轴与线电荷重合，原点置于线段 $l$ 的中点，于是子午面($\rho Oz$)内 $\rho$ 轴上的任一点即为题设的场点 $P$。可以指出，因场强方向无从事先判断，故本例虽有对称性，但不适用于高斯定理求其场强分布。现运用直接积分关系式求解。考虑在 $z'$ 处取元电荷 $\mathrm{d}q=\tau\mathrm{d}z'$，同时在 $-z'$ 处也取一对应的元电荷 $\mathrm{d}q$。从图 2-5 可见，两元电荷在 $\rho$ 轴上任意点 $P(\rho,0,0)$ 处所引起的电场强度的 $z$ 向分量互相抵消，$\rho$ 向分量则互相增强。由于对整个线段 $l$ 上的线电荷分布都可以如此成对地截取元电荷，这样，最终合成场强必有 $E_z=0$ 和 $E=E_\rho$。

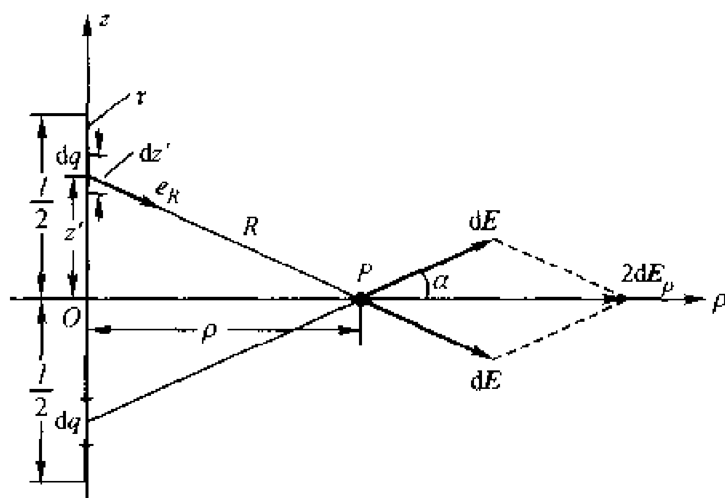



图 2-5 有限长直线电荷沿 $\rho$ 方向的电场

参阅图 2-5，对可看作为点电荷的元电荷 $\mathrm{d}q$，由式(2-22)，可知其在场点 $P$ 处产生的元场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的 $\rho$ 向分量为

$$\mathrm{d}E_\rho=\mathrm{d}E\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\mathrm{d}z'}{R^2}\cos\alpha$$

---

* 场域内，在通过对称轴的一系列旋转平面(子午面)上，具有完全相同的场分布特征的场即称为轴对称场。

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau\rho \mathrm{d}z'}{(\rho^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

从而 $$E_P(\rho,0,0) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathrm{d}E_\rho = 2 \cdot \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\rho \mathrm{d}z'}{(\rho^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

利用变量代换 $z' = \rho\tan\alpha$，$\mathrm{d}z' = \rho\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha$，代入上式，最终解得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_P(\rho,0,0) &= 2 \cdot \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_0^{\alpha_0} \cos\alpha \mathrm{d}\alpha \boldsymbol{e}_\rho \\ &= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sin\alpha_0 \boldsymbol{e}_\rho \end{aligned} \tag{2-24}$$

式中，$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{l}{2\rho}\right)$。

如果$\frac{l}{2\rho} \ll 1$，这意味着或者 $l$ 很小或者 $\rho$ 很大，其结果是 $\sin\alpha_0 \approx \frac{l}{2\rho}$，于是式(2-24)可改写为

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\boldsymbol{e}_\rho$$

显然，这相当于电量为($\tau l$)的点电荷产生的电场。换句话说，短线电荷的远场效应等同于点电荷。

如果是无限长直的线电荷，则应有$\frac{l}{2\rho} \gg 1$，以及 $\alpha_0 = \arctan\left(\frac{l}{2\rho}\right) \approx \frac{\pi}{2}$，于是式(2-24)变为

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho \tag{2-25}$$

**例 2-4** 求例 2-1 的逆问题解。换句话说，求真空中由球状分布电荷所产生的空间电场强度分布，设该电荷体密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$为

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{r} & (0 < r \leqslant a) \\ \rho = 0 & (r > a) \end{cases}$$

**[解]** 根据给定电荷分布的球对称性，采用球坐标系，坐标原点与球状分布的电荷中心 $O$ 相重。作原点为球心，半径为 $r$ 的球形高斯面 $S$，在该高斯面上，$\boldsymbol{E}$ 的数值为常数，方向是径向，可以应用高斯定理求距球心 $r$ 处的电场强度。

(1) 当 $r \leqslant a$ 时，式(2-6)的左边有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\oint_S \mathrm{d}S = E(4\pi r^2)$$

右边积分为

$$\frac{\int_V \rho \mathrm{d}V}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{2\pi r^2}{\varepsilon_0}$$

所以求得 $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r \qquad (r \leqslant a)$$

(2) 当 $r > a$ 时

$$E(4\pi r^2) = \frac{2\pi a^2}{\varepsilon_0}$$

因此 $$\boldsymbol{E} = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r > a)$$

场强随 $r$ 变化的关系示于图 2－6。由此例可见，对于这种源于场源和媒质结构对称的具有对称性特征的场，利用高斯定理计算其电场强度是十分简便的。若按例 2－3 的方法，根据电荷分布直接积分求 $\boldsymbol{E}$，则将相当复杂。

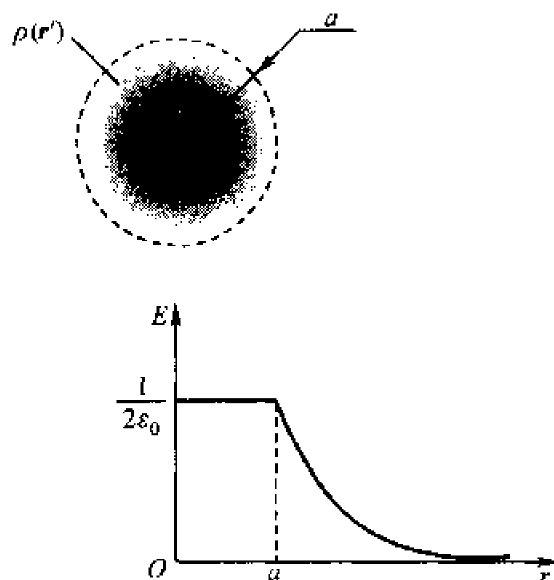



图 2－6 球状分布的体电荷的电场

### 2.2.3 场分布：基于位函数 $\varphi$ 的分析

根据式(2－10)，即可由给定的自由空间中体电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 求出场空间中的电位函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的分布。同前理，考虑到元电荷 $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V' = \sigma \mathrm{d}S' = \tau \mathrm{d}l'$，按式(2－10)可写出自由空间中由面电荷 $\sigma(\boldsymbol{r}')$ 和线电荷 $\tau(\boldsymbol{r}')$ 分布所产生的电位分别为：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' \tag{2-26}$$

和

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'} \frac{\tau(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}l' \tag{2-27}$$

对于无界自由空间中位于坐标原点的点电荷 $q$ 所激励的电场，其电位 $\varphi$ 的分布可由式(2-12)的逆运算式(2-15)求出，即以式(2-21)，并取积分路径 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与电力线相重($\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r$)，得

$$\begin{aligned}\varphi_P(\boldsymbol{r}) &= \int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{r_P}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}\end{aligned} \tag{2-28}$$

若场源为 $n$ 个点电荷，则应用叠加原理，根据式(2-28)，任一场点($\boldsymbol{r}$)处的电位为

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{R_k}\end{aligned} \tag{2-29}$$

以上式(2-10)、(2-26)—(2-29)给出了已知电荷分布求由单值位函数 $\varphi$ 所描述的位场分布的计算关系式。如前所述，静电场的无旋性，决定了该位场分布与电场强度矢量场分布之间一一对应的等同性，因而位函数 $\varphi$ 的引入，在对静电场问题的直接分析中，也具有实际的重要意义。

**例 2-5** 设真空中电荷在半径为 $a$ 的圆盘形平面域中均匀分布，其电荷面密度分布函数为 $\sigma$。试求：

(1) 与该均匀带电圆盘形平面相垂直的轴线上的电位分布；

(2) 轴线上的电场强度。

**[解]** (1) 按"先分后合"的分析思路，首先，对离散化整体电荷所得的典型元电荷分布，求出其元电位解答；然后，应用叠加原理，合成所有元电荷的分布，即得待求位场分布。根据本例电荷分布的对称性，如图 2-7 所示，离散化整体电荷为一系列同心圆环状的元电荷分布。采用圆柱坐标系，由图可见，典型的圆环状电荷上的元电荷 $\sigma\mathrm{d}S = \sigma\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho$ 在轴线上任一场点 $P$ 处引起的元电位

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho$$

所以整体呈圆盘形分布的面电荷在场点 $P$ 处产生的电位是

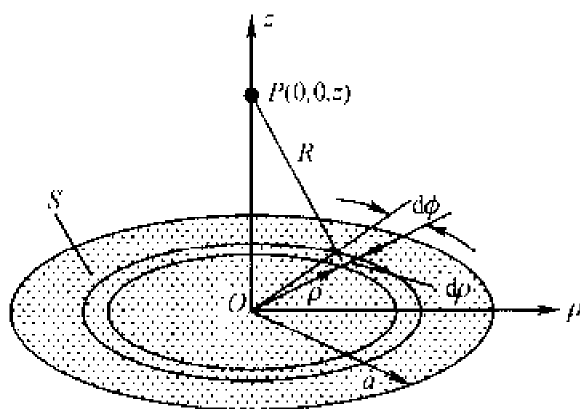



图 2-7 呈圆盘形面电荷分布的电场

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \int_S \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - z \right)
\end{aligned}
$$

(2) 应用圆柱坐标系中的梯度表达式(附录二),可得电场强度为

$$
\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right]\boldsymbol{e}_z
$$

如果电荷分布区域展拓为一无限大的带电平面,则可在圆盘形半径 $a \to \infty$ 的条件下,按上式等同地计算无限大带电平面所引起的空间电场强度分布为

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z
$$

应注意,$\boldsymbol{E}$ 的量值是一常量,与场点至带电平面的距离无关。

由此例可见,通过位场分布来计算 $\boldsymbol{E}$ 场分布,远比直接由场源分布通过矢量积分求 $\boldsymbol{E}$ 来得简便。

**例 2-6** 试求电偶极子的电场强度与电位。

**[解]** 电偶极子是指一对相距很近的等量异号电荷所组成的场源系统,如图 2-8 所示。通常定义电偶极矩 $\boldsymbol{p}$(简称电矩,即 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{d}$ 为正负电荷间的距离矢量,且规定 $\boldsymbol{d}$ 的方向由负电荷指向正电荷)表征其特性。在电介质中的场与电磁波辐射场等问题的分析中,电偶极子作为基本激励单元具有实际应用价值。工程上,感兴趣的是电偶极子远区的场,即场点至电偶极子中心的距离 $r \gg d$ 的情况。现采用球坐标系,设原点在电偶极子的中心,$z$ 轴与 $\boldsymbol{d}$ 相重。应用叠

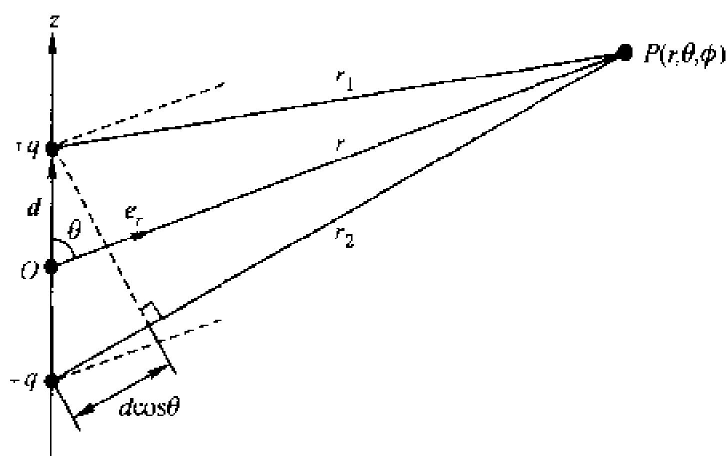



图 2-8　电偶极子

加原理，由式(2-29)得场中任意点 P 的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) \tag{2-30}$$

对于远区场，由图 2-8 可见，当 $r$ 很大时，$r_1$、$r_2$ 和 $r$ 三者将近乎平行，这时 $r_2 - r_1 \approx d\cos\theta$，以及 $r_1 r_2 \approx r^2$。把以上关系代入式(2-30)，得

$$\varphi = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{2-31}$$

应用球坐标系中的梯度表达式(附录二)，便可求得远区任意点的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{2-32}$$

由以上式(2-31)和(2-32)可知，电偶极子的电位与距离平方成反比，电场强度的大小与距离的三次方成反比，此外，其电位或电场强度均与方位角 $\theta$ 相关。因此，电偶极子的电场特征明显不同于点电荷的电场。

### 2.2.4　电场线和等位面(线)

为形象化地描绘电场，法拉第提出了电场线($\boldsymbol{E}$ 线)的概念。显然，这种描述矢量场的矢量线，是一种假想的线，但它有助于对电磁场空间分布特征的理解。在当今电磁场的计算机辅助分析与设计的后处理中，它更进一步被用作场图定量分析的有效工具。

根据 $\boldsymbol{E}$ 线的定义，即 $\boldsymbol{E}$ 线上任一点的切线方向应与该点电场强度方向相一致，故如图 2－9 所示，若以 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 线上 $P$ 点处的元长度段，则由该点处 $\boldsymbol{E}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的共线关系

$$\boldsymbol{E} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2-33}$$

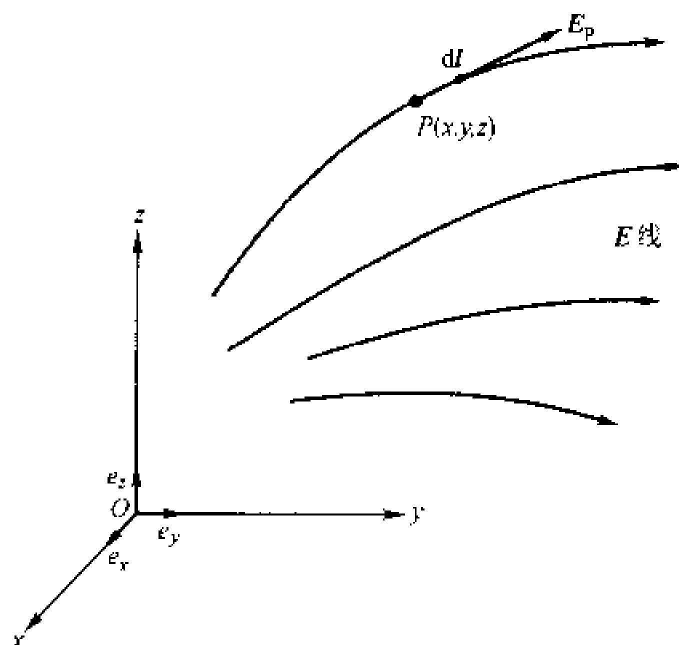



图 2－9　$\boldsymbol{E}$ 线的图示

在直角坐标系下展开上式，应有

$$(E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y + E_z\boldsymbol{e}_z) \times (\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z)$$

$$= (E_y\mathrm{d}z - E_z\mathrm{d}y)\boldsymbol{e}_x + (E_z\mathrm{d}x - E_x\mathrm{d}z)\boldsymbol{e}_y + (E_x\mathrm{d}y - E_y\mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_z = 0$$

由此，按零矢量的定义，可得出以下三个方程，即：

$$\frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}; \qquad \frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}x}{E_x}$$

因而有

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z} \tag{2-34}$$

上式便是 $\boldsymbol{E}$ 线的微分方程，而该微分方程的解答就是描绘 $\boldsymbol{E}$ 线的函数关系式。通常，$\boldsymbol{E}$ 线的函数关系式可一般性地记为

$$\psi(x, y, z) = C \tag{2-35}$$

式中 $C$ 是常数。取决于不同的 $C$ 值，即可获得一系列 $\boldsymbol{E}$ 线的分布，从而直观地描绘了静电场场强 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$空间分布的状态。

由前分析已知，静电场的无旋性表明它也可表述为标量位场 $\varphi(\boldsymbol{r})$，因而通过等值（位）面方程（1－21），当相邻两等位面间的电位差 $\Delta\varphi$ 保持相等时，同样

可以直观地描绘位场 $\varphi(r)$空间分布的状态。此时,等位面分布愈密处,场强愈大。

无论基于 1.2.4 节的讨论,或直接从电位函数 $\varphi$ 的物理意义出发,均可得知 $\boldsymbol{E}$ 线处处和等位面(线)正交。关于可作为定量分析工具的由 $\boldsymbol{E}$ 线和等位线构成的场图描绘方法,读者可参阅参考书目[14]。

**例 2-7** 描绘电偶极子远区的场图(等电位线和电场线)。

**[解]** 根据式(1-21),由式(2-31)可知,电偶极子远区等电位线的方程是

$$\varphi_{\mathrm{P}}(r,\theta,\phi)=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=C$$

因此有
$$r^2=k_1\cos\theta$$

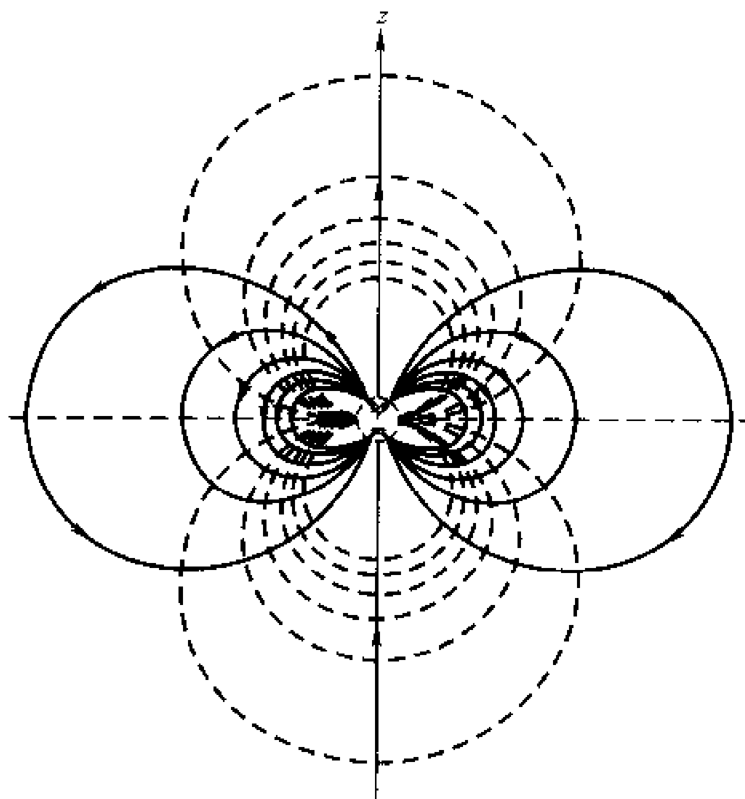



图 2-10 电偶极子的场图

这样,取决于不同的 $k_1$ 值,可画出一系列 $r-\theta$ 曲线,即是相应的等电位线,如图 2-10 中虚线所示。在 $0\leqslant\theta<\pi/2$ 范围内,$\varphi>0$;而在 $\pi/2<\theta\leqslant\pi$ 时,由图可见,所得等位线将呈镜像对称,但其值 $\varphi<0$。基于电偶极子电场的轴对称特征,将等位线绕 $z$ 轴旋转便得空间三维的等位面分布,其中 $z=0$(即 $\theta=\pi/2$)的平面为零电位面。

根据式(2-34),参阅附录一中元长度的关系式,可知本例 $\boldsymbol{E}$ 线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}r}{E_r}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{E_\theta}=\frac{r\sin\theta\mathrm{d}\phi}{E_\phi} \tag{2-36}$$

由电偶极子远区电场强度的解答[式(2-32)]可见，$E_\phi=0$，故按式(2-36)代入 $E_r$ 和 $E_\theta$ 分量，可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{2\cos\theta}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{2\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

可解得
$$\ln r=2\ln(\sin\theta)+\ln k_2$$

因此，**E** 线的函数关系式为
$$r=k_2\sin^2\theta$$

根据上式，取决于不同的 $k_2$ 值，可画出一系列 $r\sim\theta$ 曲线，即为相应的电场线（**E** 线），如图 2-10 中带箭头的实线所示。

因为式(2-31)和(2-32)的分析是在 $r\gg d$ 的远区条件下得出的，故图 2-10 中原点附近的小圆示意其内部场图并未绘出。

## 2.3 导体和电介质

在前节，为了突出讨论源量与场量之间的关系，场空间被典型化为理想的无界自由空间。实际上，在工程静电场问题的场域中，总存在有某些实体媒质。这时，场与媒质之间要发生相互作用，也就是说，有媒质存在时的电场问题，必须计及媒质的电磁性能。根据媒质在静电场中的特征，可以将其分成两大类：导电体（即导体）和绝缘体（电介质）。

### 2.3.1 静电场中的导体

导体是一种拥有大量自由电子的物质。如果有外电场存在，由于受电场力的作用，导体内这些可自由移动的电子（自由电荷）将反电场方向产生宏观定向运动，从而使导体中的电荷重新分布，呈现所谓静电感应现象。这一过程必然导致在导体内部形成一个与原有电场相互抵消的附加电场，最终使导体处于静电平衡状态。因此，静电场中的导体应具有以下基本特征：

1. 导体内部 $\boldsymbol{E}=0$。因为否则将引起导体中自由电荷的运动，不满足静电平衡的状态。

2. 导体是一个等位体。根据 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，既然导体中 $\boldsymbol{E}=0$，则导体的电位 $\varphi$ 必须是常量。

3. 导体表面必与其外侧的 $\boldsymbol{E}$ 线正交。显然，这是导体表面是等位面的必然结论。

4. 电荷必然以电荷面密度 $\sigma(\boldsymbol{r}')$分布的形态，呈现在导体表面，且其分布密度取决于导体表面的曲率(曲率越大，面电荷分布越集中)。

在工程上，利用导体尖端放电效应的避雷针，高电压设备接电端表面的光滑化且力求曲率均匀的工艺处理，操作者在高电位状态下得以安全地进行高电压测试的法拉第笼，高电压工作室内利用导体静电屏蔽功能的接地金属网等都是基于上述静电场中导体行为特征的应用实例。

### 2.3.2 静电场中的电介质·电介质的极化

理想电介质是电导率为零的理想绝缘材料，其中的带电粒子是被原子内在力、分子内在力或分子间的力所束缚，因此这些粒子的电荷称作束缚电荷。在电场作用下，束缚电荷可以有微小的移动，但不能离开分子的范围。应指出，事实上并不存在绝对理想的电介质，实际的电介质通常呈现很微弱的导电性，它们的电导率约为良导体的 $10^{-20}$，因此对应于实际应用的目的，电介质可被认为是不导电的理想电介质。

电介质在静电场中的行为特征截然不同于导体，对其进行的分析自然可归结为束缚电荷在外电场作用下的响应。取决于各种电介质不同的物质结构，在外电场作用下，束缚电荷的响应(即所谓电介质的极化现象)有以下两种类型：

1. 位移极化现象：归属为无极分子电介质的 $H_2$、$N_2$、$O_2$、$CH_4$、$CCl_4$ 等物质，在正常情况下，其分子内所有正、负电荷作用中心是重合的，呈电中性。而在外电场作用下，由于正、负电荷受到相反方向的电场力，二者作用中心发生相对位移，形成一个电偶极子，对外显现电性。

2. 取向极化现象：归属为有极分子电介质的 $H_2O$、$N_2O$、$SO_2$ 和有机酸等物质，在正常情况下，其分子内所有正、负电荷的作用中心不相重合而形成一个电偶极子，但宏观上因热运动所致，分子电矩 $\boldsymbol{p}(=q\boldsymbol{d})$取向杂乱无章而相互抵消，对外呈电中性。在外电场作用下，有极分子的电矩发生转向，这时它们的等效偶极子电矩的矢量和便不再为零，对外显现电性。

无论哪种极化现象，其结果均使束缚电荷的分布发生变化，从而在宏观上可将电介质在静电场中因极化而显示的电性，归结为真空中电偶极子呈现的极化电场效应。这一极化电场与真空中外电场相叠加，便形成有电介质存在时的合成电场。

为表征介质极化的程度，对于极化电场的分析，可引入电极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$，其定义是极化后形成的每单位体积内电偶极矩的矢量和，即

$$P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum p}{\Delta V} \quad (\text{单位}:\mathrm{C/m^2}) \tag{2-37}$$

实验结果表明，极大多数介质在电场作用下产生极化时，其电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与介质中的合成电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比，即

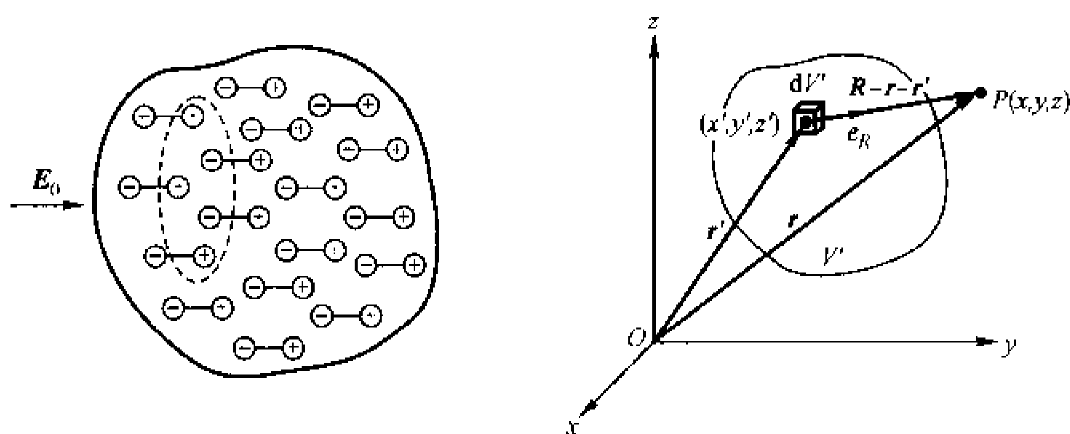
$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2-38}$$

式中 $\chi_e$ 称为介质的电极化率，它是一个量纲为一的正实数。由此可见，当电极化率与电场方向无关时，这类介质称为各向同性介质。有些介质(如水晶)的电性能是各向异性的，这时电极化率将是一个三维二阶张量

$$\boldsymbol{\chi}_e = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \tag{2-39}$$

共有 9 个分量。当介质中各点的电极化率为同一常数时，称为均匀介质，否则为非均匀介质。如电极化率的值不随电场强度的量值而变化，则称为线性介质；反之，为非线性介质。因此，若式(2-38)中电极化率 $\chi_e$ 是一个正实常数，则该式适用于均匀且各向同性的线性介质。

现在进一步讨论电介质中的极化电场。首先，如图 2-11(a)所示，极化后，介质中如前所述出现了一些取向大致相同的电偶极子，此时在介质表面呈现面分布的束缚电荷，且取决于外施电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向，左、右两侧表面分别对应为负束缚电荷与正束缚电荷的面分布。此外，若介质是非均匀介质，则因极化产生的电偶极子的分布也是不均匀的。这样，在介质内部将出现束缚电荷的体分布，如图中虚线部分所示。因此，下面讨论束缚电荷的面、体密度分布与电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的关系。这种因极化产生的面、体分布的束缚电荷又称为极化电荷。




(a) 束缚电荷分布的示意图　　(b) 束缚电荷建立的电场

图 2-11　电介质的极化电场

设图 2-11(b)中 $V'$ 是已极化的介质的体积，其内电极化强度为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$。依

据式(2－37)可知，体积元 $\mathrm{d}V'$ 内的等效电偶极子的电偶极矩 $\Sigma \boldsymbol{p}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$，参照式(2－31)，它在远区 $P$ 点处产生的电位应为

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\boldsymbol{P}\mathrm{d}V'\cdot\boldsymbol{e}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2} \tag{2－40}$$

由于

$$\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}=\nabla'\frac{1}{R}=-\nabla\frac{1}{R}$$

式(2－40)可改写成

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{P}\mathrm{d}V'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)$$

因此，体积 $V'$ 内所有电偶极矩在 $P$ 点产生的合成电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\boldsymbol{P}\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V' \tag{2－41}$$

根据矢量恒等式[参见附录二中式(4)]

$$\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\frac{1}{R}=\nabla'\cdot\left(\boldsymbol{P}\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}$$

代入式(2－41)，可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\boldsymbol{P}\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'-\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{R}\mathrm{d}V'\right] \tag{2－42}$$

再应用散度定理[式(1－41)]，上式还可写成

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S'}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{R}\mathrm{d}V' \tag{2－43}$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$ 是闭合面 $S'$ 的外法线方向的单位矢量。分析式(2－43)，并与式(2－26)和(2－10)相比较，可以看出，面积分中的 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n$ 相当于一种电荷面密度；体积分中的 $-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}$ 相当于一种电荷体密度。显然，这两项源量起因于电介质在电场作用下发生极化而产生的束缚电荷。由此定义极化电荷的面密度与体密度分别为：

$$\sigma_P=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n \tag{2－44}$$

和

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{2－45}$$

可以证明，对于均匀介质，无论是否均匀极化，在其内部无极化电荷分布，即 $\rho_P=0$，极化电荷将只能出现在每一种介质的表面上。此外，介质极化后整体极化电荷分布的总和应等于零，即

$$(q_P)_t=\oint_S\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S+\int_V-\nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V=0$$

在引入极化电荷密度描述的基础上，类比于自由电荷产生的电场，极化电荷在真空中所产生的极化电场，可分别通过电位 $\varphi$ 和场强 $\boldsymbol{E}$ 表示为：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\rho_P(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \int_S \frac{\sigma_P(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right] \tag{2-46}$$

和

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \rho_P(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' + \int_S \sigma_P(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}S'\right] \tag{2-47}$$

## 2.4 电介质中的电场

由前分析可知，根据介质极化的物理本质，存在电介质时的静电场问题，可归结为在真空中自由电荷与极化电荷共同产生的静电场。因此，对于电介质中电场的分析，其基本出发点已如前述。出于简化工程问题分析的需要，当介质被看作为具有相应几何形状、宏观性能参数为 $\varepsilon$（介质的介电常数）的空间后，可进一步定义另一基本场量——电位移矢量 $\boldsymbol{D}$。从而，将能更简便地分析电介质中的电场问题。

### 2.4.1 电介质中的高斯定理

基于上述分析，根据真空中的高斯定理的微分形式，电介质中高斯定理的微分形式应表达为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} \tag{2-48}$$

将式(2-45)代入上式可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \cdot \boldsymbol{P})$$

即

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho \tag{2-49}$$

上式右边单纯是自由电荷体密度。在讨论自由空间中的电场时，基本方程(2-4a)已经指出，自由电荷体密度等于 $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$。显然，在自由空间中 $\boldsymbol{P}=0$，式(2-49)依然是成立的。因此，对比之下，可以确认在电介质存在的情况下，应定义电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{2-50}$$

以计入电介质极化的影响。这样，式(2-4a)和(2-48)都是电介质中静电场的

散度公式，但应注意，由散度的物理意义可知，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的源是自由电荷，而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的源则既可以是自由电荷，也可以是束缚电荷。

基本方程(2－3a)即是电介质中高斯定理的积分形式，并可进一步以高斯面 $S$ 内所包围的自由电荷总量 $q$ 表示如下

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV = q \tag{2-51}$$

上式表明，介质中穿过任一闭合面 $S$ 的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的通量等于该闭合面内自由电荷的代数和，而与束缚电荷无关。因此，在具有对称性分布特征的某些电介质中电场问题的计算中，基于电位移矢量，应用高斯定理[式(2－51)]计算场分布是十分简便有效的方法。然而，必须指出，作为静电场基本规律性的描述，式(2－51)表明，不论高斯面内外有无介质存在，电位移 $\boldsymbol{D}$ 的闭合面积分，即其通量，仅与其中的自由电荷相关。但是，这决非意味着电位移 $\boldsymbol{D}$ 的分布与介质无关，因为如式(2－50)所示，$\boldsymbol{D}$ 本身就表征着介质极化的物理本质。

## 2.4.2 介电常数·击穿场强

对于任何电介质，式(2－49)和(2－50)均成立。工程上经常遇到的是均匀且各向同性的线性电介质，在这类电介质中，式(2－38)成立。将式(2－38)代入式(2－50)，可得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}$$

令

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$$

则有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{2-52}$$

式中 $\varepsilon$ 称为电介质的介电常数，它是介质极化特性的表征。已知极化率 $\chi_e$ 为正实数，因此，所有各向同性电介质的介电常数均大于真空的介电常数。实际中经常使用介电常数的相对值，即所谓相对介电常数 $\varepsilon_r$，定义为

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = (1+\chi_e) \tag{2-53}$$

可见，所有各向同性电介质 $\varepsilon_r>1$。表 2－1 列出了一些常用电介质的相对介电常数。

由前对于极化率 $\chi_e$ 的讨论可知，在各向同性的电介质中，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 方向相同。对于线性电介质，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 在数值上成正比。在非均匀介质中 $\varepsilon$ 是空间坐标的标量函数，在均匀介质中 $\varepsilon$ 是常数。在各向异性的电介质中，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 方向可能不同，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是一个张量。显然，当给出介电常数这一物性特征参数后，介质即可被理想化为具有相应几何特征的，宏观性能参数为 $\varepsilon$ 的空间，从而电介质中电场

问题的分析可简洁地归结为场量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 或位函数 $\varphi$ 的定解问题。

在工程上，电介质被广泛用作电绝缘材料。在很强的电场作用下，介质中的束缚电荷可能脱离分子而自由移动，这时电介质就丧失了它的绝缘性能，称作介质击穿。某种介质材料所能承受的最大场强就称为该电介质的击穿场强，或称为该材料的电介质强度。几种常用绝缘材料的击穿场强列于表 2－1。

**表 2－1　电介质的介电常数和击穿场强**

| 电介质 | 相对介电常数 $\varepsilon_r$ | 击穿场强 $\frac{E_{max}}{V/m}$ |
|---|---|---|
| 空气(1 大气压) | 1.0 | $3\times10^6$ |
| 六氟化硫(1 大气压) | 1.002 | $(7\sim9)\times10^6$ |
| 云母 | 5.4 | $100\times10^6$ |
| 陶瓷 | 5.3～6.5 | $10\times10^6$ |
| 硬橡胶 | 2.5～3 | $60\times10^6$ |
| 环氧树脂 | 4 | $35\times10^6$ |
| 变压器油 | 2～3 | $12\times10^6$ |
| 聚乙烯 | 2.26 | $18\times10^6$ |
| 玻璃 | 4～7 | $(9\sim25)\times10^6$ |
| 聚苯乙烯 | 2.55 | $20\times10^6$ |
| 纸 | 3 | $15\times10^6$ |
| 聚四氟乙烯 | 2.0 | $20\times10^6$ |
| 纯水 | 81 | / |

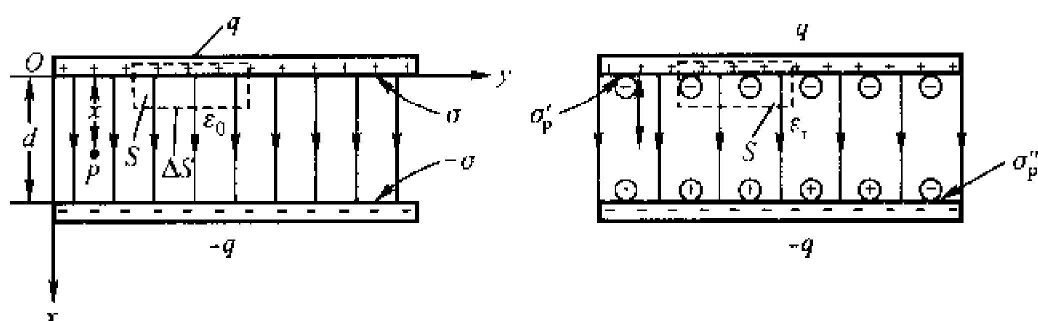
**例 2－8**　一理想的平板电容器(图 2－12)由直流电压源 $U$ 充电后又断开电源，然后在两极板间插入一厚度等于 $d$ 的均匀介质板，其相对介电常数 $\varepsilon_r=6$。忽略极板的边缘效应，试求：(1) 插入介质板前后平行板间各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电位 $\varphi$，以及极板上的电荷分布；(2) 介质板表面和内部的极化电荷分布。

**[解]**　(1) 理想的平板电容器电场可被看作为具有平行平面场* 特征的典型均匀电场，故在插入介质板前的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_0=\frac{U_0}{d}\boldsymbol{e}_x$$

电位移矢量 $\boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0=\varepsilon_0\dfrac{U_0}{d}\boldsymbol{e}_x$。

* 场域内，在一系列相互平行的平面上，具有完全相同的场分布特征的场即称为平行平面场。




(a) 插入介质板前的电场 $\boldsymbol{E}$　　　　(b) 插入介质板后的电场 $\boldsymbol{E}$

图 2－12　理想平板电容器的电场

若取负极板电位为电位 $\varphi$ 的参考电位，则板间任一点的电位

$$\varphi_{\mathrm{P}} = \int_x^d \boldsymbol{E}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_x^d E_0 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{U_0}{d}(d - x)$$

设两极板上自由电荷的面密度分别为 $\sigma$ 和 $-\sigma$，根据高斯定理，作圆柱形的高斯面 $S$，如图 2－12(a)中虚线所示，上下底面与极板平行，面积为 $\Delta S$，则有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_0 \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

因而得

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d}$$

根据题设，电容器在充电后电源已被切断，因此在插入介质板后，极板上自由电荷的总量应保持不变。换句话说，介质板插入前后给定的场源条件为"常电荷体系"。显然，此时极板间电场仍为均匀电场，故同前理，作圆柱形高斯面 $S$，如图 2－12(b)中虚线所示，可得

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D \Delta S = \sigma \Delta S$$

因此有

$$D = \sigma = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} \quad (\boldsymbol{D}\text{ 的方向由正极板指向负极板})$$

而电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = \frac{U_0}{6d}\boldsymbol{e}_x$$

任一点电位为

$$\varphi'_{\mathrm{P}} = \int_x^d E \mathrm{d}x = \frac{U_0}{6d}(d - x)$$

以上分析计算结果表明，在给定场源为常电荷体系的条件下，插入介质板

后，因电介质极化所产生的极化电场对原电场的抵消作用，导致 $\boldsymbol{E}$ 变小，而 $\boldsymbol{D}$ 不变。

(2) 介质极化，由式(2-38)和(2-53)可知介质中的极化强度

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$
$$=\frac{5\varepsilon_0 U_0}{6d}\boldsymbol{e}_x=\frac{5\sigma}{6}\boldsymbol{e}_x$$

从而根据式(2-44)，可得介质板上下两端面上极化电荷的面密度分别为：

$$\sigma'_P=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}'_n=\frac{5\sigma}{6}\boldsymbol{e}_x\cdot(-\boldsymbol{e}_x)=-\frac{5\sigma}{6}$$

和

$$\sigma''_P=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}''_n=\frac{5\sigma}{6}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=\frac{5\sigma}{6}$$

而根据式(2-45)，介质板中极化电荷的体密度

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0$$

容易看出，合成电场 $\boldsymbol{E}$ 应是电容器极板上正、负自由电荷和极化电荷 $\sigma'_P$、$\sigma''_P$ 共同在真空($\varepsilon_0$)中产生效应的叠加，两者电场方向相反，即

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma''_P}{\varepsilon_0}=\frac{U_0}{6d}$$

可见，上式结果与前通过介质中高斯定理的应用、并引入介电常数 $\varepsilon$ 所得的结果相一致。

**例 2-9** 一单芯同轴电缆横截面如图 2-13 所示。设其长度 $L$ 远大于截面半径，已知内、外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，中间介质的介电常数为 $\varepsilon$。现将该电缆与一直流电压源 $U_0$ 相连接，试求：(1) 介质中的电场强度 $\boldsymbol{E}$，作出 $E\sim\rho$ 变化图形；(2) 介质中 $E_{max}$ 位于哪里？其值多大？

**[解]** 设内、外导体沿轴线方向每单位长度的带电量分别为 $+\tau$ 和 $-\tau$。据题设，本例可看作平行平面场问题，且具有圆柱对称特征。

(1) 应用高斯定理，作与电缆同轴，且半径为 $\rho$，高为 $l$ 的圆柱形高斯面 $S$，如图中虚线所示。显然，在圆柱面上 $\boldsymbol{D}$ 的数值相同，方向为柱面的外法线方向，而在二底面上则并无 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量，因此可得

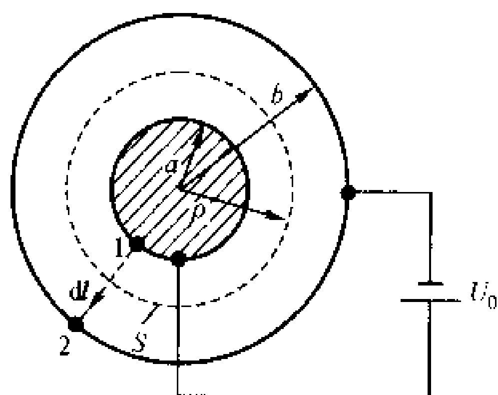
$$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=D2\pi\rho l=\tau l$$

即
$$\boldsymbol{D}=\frac{\tau}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

所以

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}\boldsymbol{e}_\rho\qquad(a<\rho<b)$$

此时,需要给出给定电压 $U_0$ 与所设电荷线密度 $\tau$ 间的关系,为此,可沿 $\boldsymbol{E}$ 线由内导体表面至外导体择取积分路径 $l$,建立如下关系:




$$U_0 = \int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b E\mathrm{d}\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

即
$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

将上式代入,则得

$$\boldsymbol{E} = \frac{U_0}{\rho\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\boldsymbol{e}_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

可见,在介质中 $E$ 值与 $\rho$ 成反比,其变化曲线示于图 2-13 中。

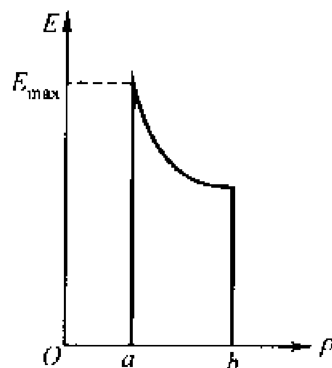



图 2-13 单芯同轴电缆的电场

(2) 显而易见,最大场强位于内导体表面($\rho = a$),其值为

$$\boldsymbol{E}_{max} = \frac{U_0}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\boldsymbol{e}_\rho$$

## 2.4.3 不同媒质分界面上的边界条件

迄今为止,在场分布的分析中,还仅限于单一媒质($\varepsilon_0$ 或 $\varepsilon$)中的场。实际上,各种电磁装置中大量遇到的是多种媒质共存的状况,这时,在不同媒质分界面上,由于媒质特性参数 $\varepsilon$ 发生突变,相应的场量及其导数一般也将发生突变,于是,为定解问题,必须给出在不同媒质分界面上场量所应满足的物理条件,即媒质分界面上的边界条件。

矢量场的确定取决于它的散度和旋度特性,因此,分界面上边界条件的讨论,即归结为积分形式下的散度和旋度方程在分界面上任一点处的极限情况的表述。鉴于静电场的无旋性,静电场也可由标量电位函数描述为标量位场,因此,本节也给出了由电位 $\varphi$ 表述的不同媒质分界面上的边界条件。

1. 两种不同介质分界面上的边界条件

将旋度方程 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$ 应用于跨越分界面的一狭小的矩形回路 $l$,如图

2－14 所示。为求出边界上的场量关系，应令 $\Delta l_2 \to 0$；同时，在所论极限情况下，因 $\Delta l_1$ 足够地短，使在 $\Delta l_1$ 上各点的场强可以认为是相等的。因此，对于环量 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，可忽略不计 $\Delta l_2$ 路径上介质 $\varepsilon_1$ 和介质 $\varepsilon_2$ 中场强法向分量的贡献，而有

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\Delta l_1} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\Delta l_1} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -E_{1t}\Delta l_1 + E_{2t}\Delta l_1 = 0$$

从而得

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2-54}$$

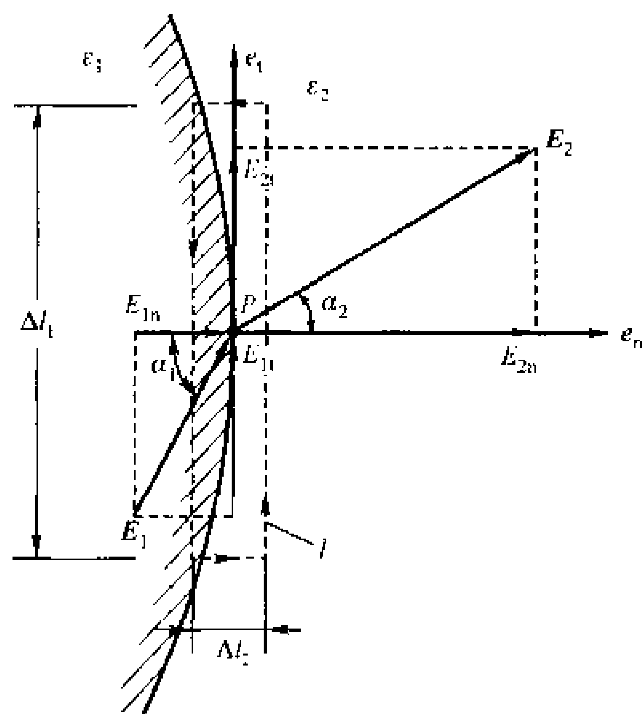



图 2－14　**E** 的旋度方程所对应的边界条件

上式表明，在两种介质分界面上，电场强度的切向分量是连续的。

继续将散度方程 $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$ 应用于跨越分界面的一个扁平圆柱体，如图 2－15 所示。该圆柱体的表面即为围绕边界点 $P$ 的元高斯面，其二底面 $\Delta S$ 平行于分界面，圆柱面高度 $\Delta l \to 0$。同样，在所论极限情况下，穿过底面上各点的电位移矢量可认为是相等的。于是

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma\Delta S$$

式中分界面上法线方向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 规定为由介质 1 指向介质 2；$\sigma$ 是分界面上可能存在的自由电荷面密度。从而得

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{2-55}$$

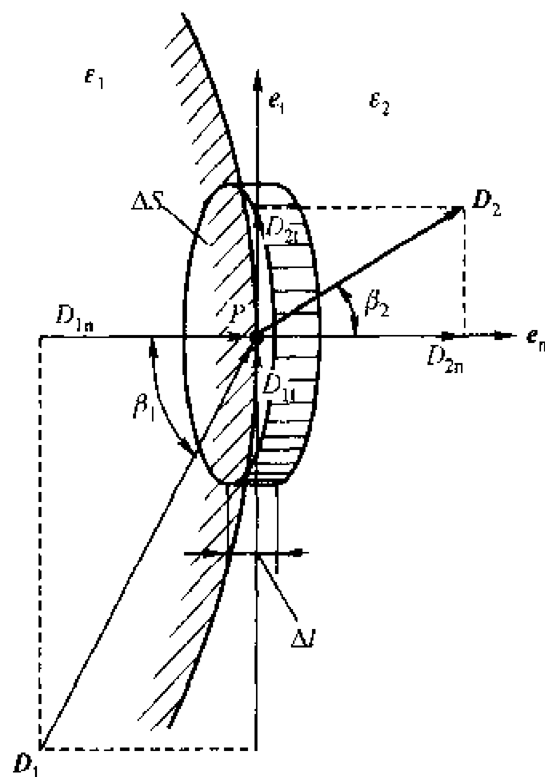



图 2 - 15　**D** 的散度方程所对应的边界条件

考虑到在两种介质分界面上通常不可能存在面分布形式的自由电荷($\sigma=0$),因此有

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{2-56}$$

此式表明,在分界面上 $\sigma=0$ 的条件下,两种介质分界面上的电位移矢量的法向分量是连续的。

由以上分析可知,若两种介质均为线性且各向同性,即 $\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2$,这样,在图 2 - 14 和图 2 - 15 中,应有 $\alpha_1=\beta_1$,$\alpha_2=\beta_2$。这时,式(2 - 54)和(2 - 56)所表达的边界条件,可分别写成:

$$E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2$$

和

$$\varepsilon_1 E_1\cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2\cos\alpha_2$$

两式相除,即得

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{2-57}$$

上式综合表述了两种不同介质分界面上场量所遵循的物理条件,称为静电场的折射定律。下面推导将阐明分界面上场量不连续性起因于介质的不均匀性而产生的极化电荷效应。

根据式(2 - 50),可得

$$D_n = \varepsilon_0 E_n + P_n$$

将上式代入式(2-56),应有

$$\varepsilon_0(E_{2n}-E_{1n}) = P_{1n}-P_{2n}$$

对应于以上分析,已规定分界面上法线方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 由媒质1指向媒质2,因此,若设分界面两侧电介质的极化电荷面密度分别为 $\sigma_{P1}$ 和 $\sigma_{P2}$,则由式(2-44)可知,$\sigma_{P1}=\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{e}_n=P_{1n}$,而 $\sigma_{P2}=\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{e}_n'=-\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{e}_n=-P_{2n}$代入上式,可得

$$\varepsilon_0(E_{2n}-E_{1n}) = \sigma_{P1}+\sigma_{P2} = \sigma_P \tag{2-58}$$

式中 $\sigma_P$ 表示分界面上的净极化电荷面密度。显然,$\sigma_P$ 取决于因分界面上介质不均匀性而产生的极化电荷分布,从而引起了分界面两侧场强与电位移矢量在数值和方向上的突变。

2. 导体和电介质交界面上的边界条件

在导体(设为媒质1)与电介质(设为媒质2)的分界面上,仿照上述推导过程,并考虑到导体内部电场强度和电位移都必须为零(即 $E_1=D_1=0$),以及导体带电时其电荷只能分布在表面(即交界面)的特性,可以导得:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0, \qquad D_{2t} = 0 \tag{2-59}$$

$$E_{2n} = \sigma/\varepsilon_2, \qquad D_{2n} = \sigma \tag{2-60}$$

式中 $\sigma$ 是导体表面的电荷面密度。以上两式说明在电介质中与导体表面相邻处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移 $\boldsymbol{D}$ 都垂直于导体表面,且电位移的量值就等于该点的电荷面密度(需注意的是,$D_{2n}=\sigma$ 的关系式是与规定的交界面上 $\boldsymbol{e}_n$ 的指向,也就是导体表面的外法线方向,相互关联的)。

3. 由电位 $\varphi$ 表述的边界条件

对位于电场中的两种不同介质的分界面来说,分界面两侧电位必须连续,否则,将意味着无限大的电场强度,这在物理上是不可能的。在介质分界面上电位连续($\varphi_1=\varphi_2$)的边界条件等价于前述 $E_{1t}=E_{2t}$的边界条件。进而考虑到如下关系式:

$$E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad 和 \quad D_n = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

就可以把两种介质分界面上的边界条件,即式(2-54)和(2-55),用电位函数表示为:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{2-61}$$

和

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma \tag{2-62}$$

相应地,对于导体与电介质的交界面,边界条件也可以用电位函数表示为:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = C \tag{2-63}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma \tag{2-64}$$

式中 $C$ 是由所论静电系统决定的某一常数。

**例 2-10** 一平行板电容器,其极板间介质由两种绝缘材料组成,介质的分界面与极板平行,如图 2-16 所示。设电容器外施电压为 $U_0$,试求:(1) 两绝缘材料中的电场强度;(2) 极板上的电荷面密度。

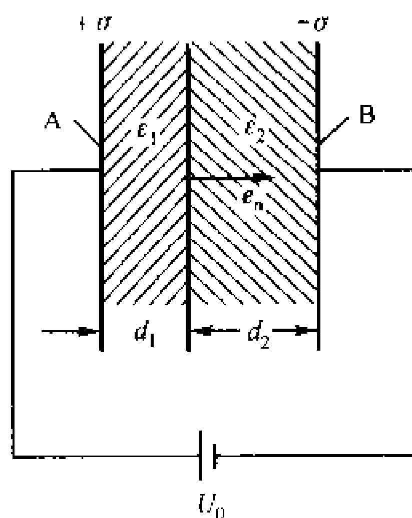



图 2-16 两层绝缘结构的平板电容器

[解] (1) 在两绝缘材料中,电位移 $D_1 = D_2$,但电场强度不相等。为求解 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,在给定电压 $U_0$ 并应用分界面上的边界条件 $(D_{1n} = D_{2n})$ 下,可以给出以下联立方程

$$\left.\begin{aligned} E_1 d_1 + E_2 d_2 &= U_0 \\ \varepsilon_1 E_1 &= \varepsilon_2 E_2 \end{aligned}\right\}$$

由此得:

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} = \frac{U_1}{d_1 + \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} d_2}$$

和

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} = \frac{U}{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2}$$

(2) 极板 A 上的电荷面密度

$$\sigma = D_{1n} = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{d_2 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} d_1}$$

极板 B 上的电荷面密度

$$\begin{aligned} \sigma' &= -D_{2n} = -\varepsilon_2 E_2 \\ &= -\sigma \end{aligned}$$

可以推论,如果一电容器的绝缘材料是固体材料,但因制造工艺上的不完善性,使极板与绝缘材料间留有一空气层,则若典型化为本例,以空气为媒质 1($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$),固体材料为媒质 2($\varepsilon_2 = \varepsilon$)。计算结果表明,空气层中 $E_1$ 将为绝缘材料中 $E_2$ 的 $\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$ 倍。事实上由于 $\varepsilon_{r2}$ 比 $\varepsilon_{r1}$ 要大得多,因此,$E_1$ 可能达到很大的值而超过空气的击穿场强,致使空气层击穿,电容器破损。

## 2.5 边值问题

以上从场的基本规律(如高斯定理,场强积分关系式等)出发,对一些典型问题中的电场进行了分析计算。但是,实际工程和物理问题中的电磁场并不都那么简单(例如,待求场量常常是两个或三个坐标变量的函数;场域边界的几何形状往往相当复杂等),因此,为了适应工程分析的需要,在电磁场问题的分析中,对应于偏微分方程定解问题的边值问题的构造及其求解,不仅是具有一般化意义的重要应用方法,而且也是众多数学物理方法构成的基础。对于静电场这类位场,以位函数 $\varphi$ 为待求量给出的泊松方程或拉普拉斯方程的定解问题,便是所论位场的边值问题。

关于边值问题的解析计算方法,本节将讨论归属直接求解法的直接积分法和分离变量法;下节将讨论归属间接求解法的镜像法;与计算机应用技术同步发展的数值计算法(如有限差分法、有限元法等),则归属为离散型边值问题的算法,限于篇幅,本书不作展述,读者可参阅参考书目[18]。

### 2.5.1 数学模型——边值问题

以静电场电位函数 $\varphi$ 为待求场函数的边值问题的构造,首先,需给出其泛定方程,也就是说,应由静电场的基本方程导出电位 $\varphi$ 所满足的基本方程;其次,给出为定解具体工程和物理问题所对应的定解条件,即场域边界上的边界条件(边值)。

1. 泛定方程——泊松方程和拉普拉斯方程

对于基本方程中 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 代入 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$,可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=\rho$$

设为均匀介质,$\varepsilon$ 为常数,即 $\nabla\varepsilon=0$,并代入等价于另一基本方程的 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 关系,则得

$$\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=\rho$$

因而

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon \tag{2-65}$$

上式即为静电场电位 $\varphi$ 的泊松方程。式中 $\nabla^2$ 称为拉普拉斯算子,在直角坐标系中,$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$。

对于场中无自由电荷分布($\rho=0$)的区域,式(2-65)成为

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{2-66}$$

这就是电位 $\varphi$ 的拉普拉斯方程。

数学上，把与物理规律对应的偏微分方程称作数学物理方程，也称为泛定方程，因此，源于静电场基本方程的泊松方程(2－65)和拉普拉斯方程(2－66)都是描述静电场"共性"的泛定方程。

2．定解条件——边界条件(边值)

作为完整的数学模型构造，在泛定方程给出"共性"描述的基础上，还必须以实际物理问题为背景，给出所谓定解条件，即待求电磁场问题的"个性"描述。然后，由泛定方程与定解条件的组合方能构成一个对应于具体物理问题，在数学上有惟一稳定解的偏微分方程的定解问题。

泊松方程和拉普拉斯方程都属一元二次线性偏微分方程，这类偏微分方程的定解条件是在方程定义域(场域)的边界上给定的边界条件(边值)，通常有下列三种情况：

(1) 给定的是场域边界 $S$ 上的电位值

$$\varphi(\boldsymbol{r})\big|_S = f_1(\boldsymbol{r}_b) \qquad (2-67)$$

式中 $\boldsymbol{r}_b$ 为相应边界点的位矢。这类边界条件称为第一类边界条件，它与泛定方程组合成第一类边值问题。

(2) 给定的是场域边界 $S$ 上电位的法向导数值

$$\left.\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_S = f_2(\boldsymbol{r}_b) \qquad (2-68)$$

称为第二类边界条件。当 $f_2(\boldsymbol{r}_b)$ 取值为零时，称为第二类齐次边界条件。相应构成第二类边值问题。

(3) 给定的是场域边界 $S$ 上的电位及其法向导数的线性组合，即

$$\left.\left[\varphi(\boldsymbol{r}) + f_3(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\right|_S = f_4(\boldsymbol{r}_b) \qquad (2-69)$$

称为第三类边界条件，相应构成第三类边值问题。

因此，静电场边值问题就是在给定第一类、第二类或第三类边界条件下，求电位函数 $\varphi$ 的泊松方程或拉普拉斯方程的定解问题。

如果场域扩展至无界空间，则作为定解条件还必须给出无限远处的边界条件。对于电荷分布在有限区域的无界电场问题，根据物理问题的本质，在无限远处($r\to\infty$)应有

$$\lim_{r\to\infty}[r\varphi(\boldsymbol{r})] = \text{有限值} \qquad (2-70)$$

这表明 $r\varphi$ 在无限远处是有界的，即电位 $\varphi$ 在无限远处取值为零[$\varphi(\boldsymbol{r})|_{r\to\infty}=0$]。

此外，当场域中存在多种媒质(包括有无电荷分布之区别)时，则对于由不同均匀介质或有无电荷分布所界定的各个子场域，应分别写出对应的泊松方程或

拉普拉斯方程。然后，作为定解条件，还必须相应地引入不同介质分界面上的边界条件，即式(2-61)和(2-62)，这类定解条件也常称为辅助的边界条件(衔接条件)。

## 2.5.2 直接积分法

当待求电位函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 仅是一个坐标变量的函数时，边值问题即归结为常微分方程的定解问题。此时，可以直接运用积分得解。

**例 2-11** 两块半无限大的导电平板构成夹角为 $\alpha$ 的电极系统，设板间电压为 $U_0$，如图 2-17 所示。试求导板间电场，并绘出场图。

[**解**] 本例为一平行平面场$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\right)$。据题设的边界条件，按图中设定的极坐标系$(\rho,\phi)$，可以判定，$\varphi(\boldsymbol{r})=\varphi(\phi)$仅为一个坐标变量 $\phi$ 的函数，因而可以写出如下的第一类边值问题：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 & (\rho,\phi)\in D \\ \varphi|_{\phi=0} = 0 \\ \varphi|_{\phi=\alpha} = U_0\end{cases}$$

将泛定方程直接积分二次，即得通解为

$$\varphi = C_1\phi + C_2$$

式中待定的积分常数 $C_1$ 和 $C_2$，可以由给定的两个边界条件代入上式，得：

$$C_1 = \frac{U_0}{\alpha},\quad C_2 = 0$$

所以
$$\varphi = \frac{U_0}{\alpha}\phi$$

和

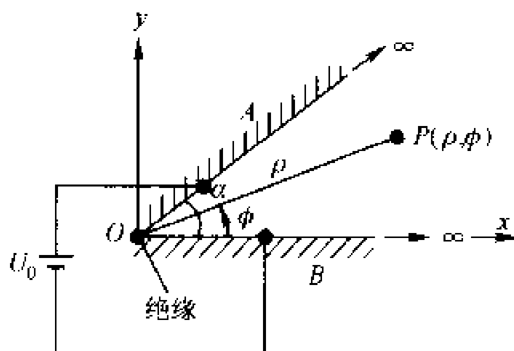



图 2-17 角形电极系统

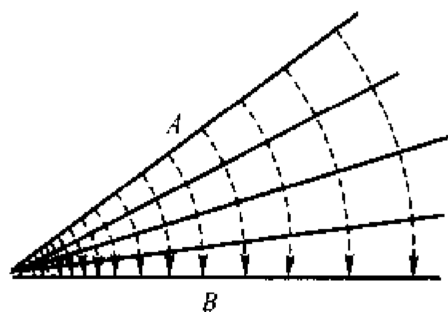



图 2-18 角形电极系统的场图

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\rho\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi = -\frac{U_0}{\rho\alpha}\boldsymbol{e}_\phi$$

为形象地表征场的分布，本例按场图定量分析中"曲线方块"的作图原则(参考书目[19]§4－7)，描绘的场图示于图2－18(虚线为电场线、实线为等位线)。由图可见，两极板上面电荷密度的分布是不均匀的[计算表明，$\sigma(\rho)$与$\rho$成反比]，在夹角顶端电场强度最大。

**例2－12** 试应用边值问题求解例2－4。

**[解]** 设球状电荷分布区域内、外的电位分别为$\varphi_1$和$\varphi_2$，显然，$\varphi_1$满足泊松方程，$\varphi_2$满足拉普拉斯方程。由于电荷分布的球对称性，所以$\varphi_1$、$\varphi_2$均是球坐标$r$的函数。本例的泛定方程为：

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r} \qquad (0 < r < a)$$

和

$$\nabla^2\varphi_2 = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \qquad (r > a)$$

据题设，给定的定解条件是：

(1) $\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a}$；

(2) $\varepsilon_0\left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} = \varepsilon_0\left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a}$；

(3) $\varphi_2\big|_{r\to\infty} = 0$；

(4) $\left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0$

以上定解条件(1)和(2)为衔接条件；条件(3)是无限远处的边界条件，也同时是本例电位参考点的条件；条件(4)则是根据电荷分布的球对称性，由球心处$E_1=0$，即$E_{1r}=0$而得出的。

将上述两个泛定方程分别积分二次，可得$\varphi_1$、$\varphi_2$的通解分别为：

$$\varphi_1 = -\frac{r}{2\varepsilon_0} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

和

$$\varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4$$

然后，代入定解条件，以逐一确定待定积分常数$C_1$、$C_2$、$C_3$和$C_4$，可得：

$$C_1 = 0,\quad C_4 = 0,\quad C_2 = \frac{a}{\varepsilon_0},\quad C_3 = -\frac{a^2}{2\varepsilon_0}$$

于是，最终得电位函数的确定解为：

$$\varphi_1 = -\frac{r}{2\varepsilon_0} + \frac{a}{\varepsilon_0} \qquad (r \leqslant a)$$

和
$$\varphi_2 = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad (r \geqslant a)$$
利用球坐标系中的梯度表达式，便可求得：
$$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r \qquad (r \leqslant a)$$
和
$$\boldsymbol{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r \geqslant a)$$
以上结果与例2-4应用高斯定理求得的结果完全相同。

### 2.5.3 分离变量法

当待求位函数是两个或大于两个坐标变量的函数时，分离变量法是直接求解偏微分方程定解问题的一种经典方法。方法应用于拉普拉斯方程定解问题的具体求解步骤是：首先，应结合场域边界几何形状的特征，选用适当的坐标系，以给出问题的数学模型（边值问题）；其次，设待求位函数由两个或两个以上各自仅含一个坐标变量的函数的乘积所组成，并把这假设的函数（试探解）代入拉普拉斯方程，借助于“分离”常数，原来的偏微分方程就可相应地转换为两个或两个以上的常微分方程。然后，解这些常微分方程并以给定的定解条件决定其中的待定常数和函数后，最终即可解得待求的位函数。一般说来，当场域边界面（线）和某一正交曲线坐标系的坐标面（线）相吻合时，分离变量法往往是一种简便而有效的方法。

下面分别阐述分离变量法在直角和圆柱坐标系中对于平行平面场问题的具体应用。

1. 直角坐标系中的平行平面场问题

设该平行平面场中位函数 $U(\boldsymbol{r}) = U(x, y)$ 为坐标 $x, y$ 的函数，在场域 $D$ 内满足拉普拉斯方程：
$$\nabla^2 U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (x, y) \in D \qquad (2-71)$$
设定分离变量形式的试探解，即令
$$U(x, y) = X(x)Y(y) \qquad (2-72)$$
将式(2-72)代入方程(2-71)，经整理得
$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} \qquad (2-73)$$

以上等式两边分别是 $x$ 和 $y$ 的单个变量的函数，显然，在 $x$ 和 $y$ 取任意值时等式恒成立的条件，必然要求两边恒为同一常数。现记该常数（常称为分离常数）为 $\lambda$，这样，原来的偏微分方程即转化为两个常微分方程：

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0 \tag{2-74}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda Y = 0 \tag{2-75}$$

待定常数 $\lambda$ 在实数范围内取值（$\lambda = 0$；$\lambda = m_n^2 > 0$ 和 $\lambda = -m_n^2 < 0$），可分别得出如下三组常微分方程(2-74)和(2-75)的通解：

当 $\lambda = 0$ 时　　$X(x) = A_{10} + A_{20}x$；　　$Y(y) = B_{10} + B_{20}y$

当 $\lambda = m_n^2 > 0$ 时　　$X(x) = A_{1n}\cosh(m_n x) + A_{2n}\sinh(m_n x)$；

$Y(y) = B_{1n}\cos(m_n y) + B_{2n}\sin(m_n y)$

当 $\lambda = -m_n^2 < 0$ 时　　$X(x) = A'_{1n}\cos(m_n x) + A'_{2n}\sin(m_n x)$；

$Y(y) = B'_{1n}\cosh(m_n y) + B'_{2n}\sinh(m_n y)$

由于拉普拉斯方程为线性方程，适用叠加原理，故可按式(2-72)，在各个特定值 $m_n$ 所对应的偏微分方程特解的基础上，由其线性组合构成偏微分方程的通解。因此，位函数 $U$ 的一般解可记作

$$\begin{aligned} U(x,y) = & \sum_{n=1}^{\infty}[A_{1n}\cosh(m_n x) + A_{2n}\sinh(m_n x)]\cdot \\ & [B_{1n}\cos(m_n y) + B_{2n}\sin(m_n y)] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}[A'_{1n}\cos(m_n x) + A'_{2n}\sin(m_n x)]\cdot \\ & [B'_{1n}\cosh(m_n y) + B'_{2n}\sinh(m_n y)] \\ & + (A_{10} + A_{20}x)(B_{10} + B_{20}y) \end{aligned} \tag{2-76}$$

然后，根据问题所给定的定解条件，通过比较系数法或进一步包括傅里叶级数展开的方法，就可逐一确定式(2-76)中的各个待定常数，最后得到待求位函数 $U(x,y)$ 的惟一确定的解答。

**例 2-13**　一长直接地金属槽的横截面如图 2-19 所示，其侧壁与底面电位均为零，而顶盖电位 $\varphi = \varphi_0$。求槽内电位分布。

**[解]**　对于接地金属槽中间区段电场的分析，显然可忽略其两端的边缘效应，而把它理想化为平行平面场问题。根据边界面的形状，采用直角坐标系如图

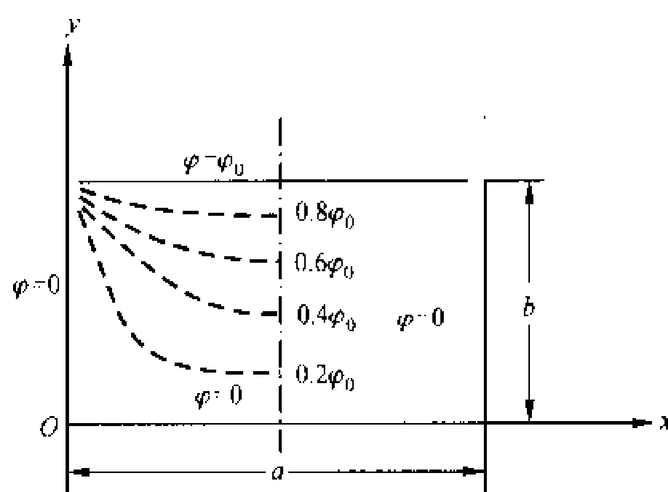



图 2－19　接地金属槽的横截面

2－19 所示。槽内电位 $\varphi(x,y)$满足拉普拉斯方程，构成如下的第一类边值问题：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(x,y)=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\ (0<x<a,0<y<b) & (2-77) \\ \varphi=0 \quad (x=0,0\leqslant y\leqslant b) & (2-78) \\ \varphi=0 \quad (0\leqslant x\leqslant a,y=0) & (2-79) \\ \varphi=0 \quad (x=a,0\leqslant y\leqslant b) & (2-80) \\ \varphi=\varphi_0 \quad (0<x<a,y=b) & (2-81) \end{cases}$$

根据前面的讨论，本例电位 $\varphi(x,y)$的一般解即为式(2－76)。现由给定的边值来决定该一般解中的各个待定常数。由式(2－78)可知：

$$A_{10}=0,\quad A_{1n}=0 \quad 和 \quad A'_{1n}=0$$

由式(2－79)可知：

$$B_{10}=0,\quad B_{1n}=0 \quad 和 \quad B'_{1n}=0$$

即

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sinh(m_nx)\sin(m_ny)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(m_nx)\sinh(m_ny)+A_{20}B_{20}xy$$

由式(2－80)可知

$$A_{20}B_{20}=0,\qquad C_n=0$$

且

$$m_n=\frac{n\pi}{a}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

故得

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{2-82}$$

将式(2-81)代入上式，则有

$$\varphi_0=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{2-83}$$

上式等号右边即系傅里叶正弦级数。为确定 $E_n$ 的值，可对上式两边同乘以 $\sin\left(\frac{K\pi x}{a}\right)$，其中 $K$ 为整数，然后从 $x=0$ 到 $x=a$ 进行积分。

$$\int_0^a\varphi_0\sin\left(\frac{K\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=\int_0^a\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{K\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \tag{2-84}$$

上式左边结果为

$$\int_0^a\varphi_0\sin\frac{K\pi x}{a}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2a\varphi_0}{K\pi} & (K\text{ 为奇数})\\ 0 & (K\text{ 为偶数})\end{cases} \tag{2-85}$$

而右边结果为

$$\int_0^a E_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{K\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (n\neq K)\\ \dfrac{a}{2}E_n & (n=K)\end{cases} \tag{2-86}$$

由式(2-84)，并考虑到式(2-85)和(2-86)的结果，应有

$$E_n=\begin{cases}\dfrac{4\varphi_0}{n\pi} & (n\text{ 为奇数})\\ 0 & (n\text{ 为偶数})\end{cases} \tag{2-87}$$

将式(2-87)结果代入式(2-83)可确定待定常数 $D_n$ 的值，再把所得 $D_n$ 值代入式(2-82)，最终得待求电位 $\varphi(x,y)$ 的解答是

$$\varphi(x,y)=\frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{(2K+1)\sinh\left[\frac{(2K+1)}{a}\pi b\right]}\sin\left[\frac{(2K+1)\pi}{a}x\right]\cdot\sinh\left[\frac{(2K+1)\pi}{a}y\right] \tag{2-88}$$

上式表明本例的解答是一无穷级数。显然，在这个级数中，项数取得越多，$\varphi(x,y)$ 的解答越精确，但随着 $K$ 的增大，第 $K$ 项的值越小，因此，通常认为选取前若干项的和(如 2—4 项)就能给出精度令人满意的近似解，此时，相应的等位线的分布如图 2-19 中虚线所示。

2. 圆柱坐标系中的平行平面场问题

设该平行平面场中位函数 $U(\boldsymbol{r})=U(\rho,\phi)$，满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2U(\rho,\phi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\phi^2}=0\qquad(\rho,\phi)\in D \tag{2-89}$$

令试探解为 $$U(\rho,\phi)=R(\rho)Q(\phi)$$
代入方程(2-89),经整理得

$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)=-\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}=n^2$$

于是,借助于分离常数 $n^2$,原偏微分方程(2-89)转化为下列两个常微分方程:

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-n^2R=0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}+n^2Q=0$$

当 $n=0$ 时 $R(\rho)=A_{10}+A_{20}\ln\rho$; $Q(\phi)=B_{10}+B_{20}\phi$

当 $n\neq0$ 时 $R(\rho)=A_{1n}\rho^n+A_{2n}\rho^{-n}$; $Q(\phi)=B_{1n}\cos(n\phi)+B_{2n}\sin(n\phi)$

于是,由以上这些解的相应乘积的线性组合,即得方程(2-89)的一般解为

$$U(\rho,\phi)=(A_{10}+A_{20}\ln\rho)(B_{10}+B_{20}\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\rho^n+A_{2n}\rho^{-n})[B_{1n}\cos(n\phi)+B_{2n}\sin(n\phi)] \tag{2-90}$$

同样,根据给定的定解条件,即可确定上式中的各个待定常数,最终得待求位函数 $U$ 的解答。

**例 2-14** 一横截面半径为 $a$、介电常数为 $\varepsilon_1$ 的长直介质圆柱体放置在均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中(场强值为 $E_0$,方向与介质圆柱的轴线相垂直),均匀场中介质的介电常数为 $\varepsilon_2$,如图 2-20 所示。求圆柱体放入后,场中的电位和电场强度。

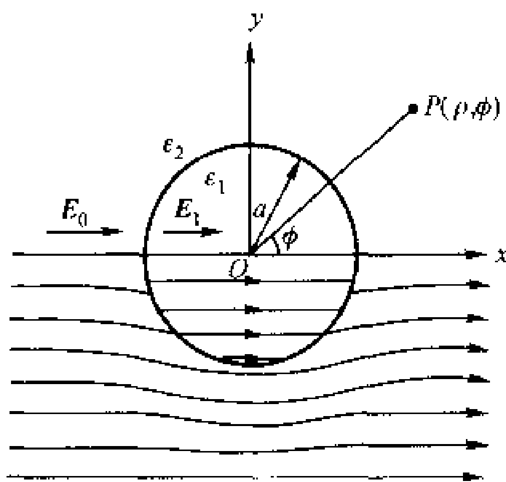


图 2-20 均匀外电场中的介质圆柱体

[解] 对于本例轴向中间区段电场的分析,可理想化为平行平面场问题。根据圆柱体界面形状,采用圆柱坐标系,且令 $z$ 轴与柱轴重合,外电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向与 $x$ 轴同向,如图 2-20 所示。由于圆柱体内外的介质不同,故应分别以 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 表示圆柱体内外的电位函数,它们都满足拉普拉斯方程,即:

$$\nabla^2\varphi_1(\rho,\phi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\phi^2}=0 \qquad (0\leqslant\rho<a) \tag{2-91}$$

和 $$\nabla^2\varphi_2(\rho,\phi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\phi^2}=0\quad(\rho>a)\tag{2-92}$$

作为本例的定解条件，首先，应指出，题设的均匀场条件表明，无限远处的电位已不再是有限值，故本例可取坐标原点为电位参考点，即

$$\varphi_1=0\qquad(\rho=0)\tag{2-93}$$

因而，与均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0=E_0\boldsymbol{e}_x$ 相应的电位函数可表示为

$$\varphi_0=-E_0x=-E_0\rho\cos\phi$$

其次，就本例在 $\rho\to\infty$ 处的边界条件而言，由于 $\rho\to\infty$ 时介质圆柱体产生的极化电场影响应当消失，故该处给定的电位值应与由均匀外电场引起的电位 $\varphi_0$ 相一致，即有

$$\varphi_2=\varphi_0=-E_0\rho\cos\phi\qquad(\rho\to\infty)\tag{2-94}$$

再次，对于圆柱表面($\rho=a$)处，不同介质分界面上的边界条件应为：

$$\varphi_1=\varphi_2\tag{2-95}$$

和 $$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\tag{2-96}$$

以上所列式(2－91)—(2－96)即构成本例所对应的边值问题。位函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 一般解的形式相同，如式(2－90)所示。根据给定的定解条件[式(2－93)—(2－96)]当可逐一确定 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 一般解中的各个待定常数，求得待求位函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 的解答。但是，为了简化分析，在分离变量法运用的过程中，也可以结合物理问题固有的特征，对有关特解作出判断，从而可得出更为简洁的一般解。

本例中，场分布应对称于 $x$ 轴，因此必有 $\varphi(\rho,\phi)=\varphi(\rho,-\phi)$，这意味着特解 $Q(\phi)$ 应是偶函数，即式(2－90)中 $B_{10}=B_{20}=B_{2n}=0$。此外，根据场的对称性又可知 $y$ 轴是一等位线，因它通过设为电位参考点的坐标原点，故应有 $\varphi(\rho,\pm\pi/2)=0$，也就是说，由特解 $Q(\pm\pi/2)=B_{1n}\cos[n(\pm\pi/2)]=0$，可知 $n=1、3、5、\cdots$ 应取奇整数。然而，当将 $n$ 值代回至特解 $Q(\phi)=B_{1n}\cos(n\phi)$ 时，可以看出，满足 $Q(\phi)=0$ 的辐角 $\phi$ 的一般解有 $\phi=\pm\frac{\pi}{2n}$，而据位函数的单值性可以判断 $n$ 取值只能是1，这是因为其他的奇整数($n=3、5、\cdots$)都导致另一些与 $x$ 轴斜交的零电位线，显然这是不允许的。从而本例 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 的一般解应分别写成：

$$\varphi_1=(C_1\rho+d_1\rho^{-1})\cos\phi\qquad(\rho\leqslant a)\tag{2-97}$$

$$\varphi_2=(C_2\rho+d_2\rho^{-1})\cos\phi\qquad(\rho\geqslant a)\tag{2-98}$$

将式(2－93)代入式(2－97)，可得 $d_1=0$；将式(2－94)代入式(2－98)，可

得 $C_2 = -E_0$，然后再应用式(2-95)提供的条件，即有

$$C_1 a\cos\phi = (-E_0 a + d_2/a)\cos\phi$$

比较上式两边系数，得

$$C_1 a = -E_0 a + d_2/a \tag{2-99}$$

同理，应用式(2-96)，有

$$\varepsilon_1 C_1 \cos\phi = \varepsilon_2(-E_0 - d_2/a^2)\cos\phi$$

即

$$\varepsilon_1 C_1 = -\varepsilon_2 E_0 - \varepsilon_2 d_2/a^2 \tag{2-100}$$

联立求解方程(2-99)和(2-100)，得：

$$C_1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0,\quad d_2 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}a^2 E_0$$

最后，待求位函数的解答为：

$$\varphi_1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0\rho\cos\phi = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0 x \quad (\rho \leqslant a) \tag{2-101}$$

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{a^2}{\rho^2}\right)E_0\rho\cos\phi \quad (\rho \geqslant a) \tag{2-102}$$

圆柱内部的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\boldsymbol{e}_x = E_{1x}\boldsymbol{e}_x = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0\boldsymbol{e}_x \tag{2-103}$$

同理，也可求得圆柱外电场强度的表达式。

由式(2-103)可见，圆柱体内场强均匀，且有与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 一致的方向，此时，介质圆柱在均匀外电场中被均匀极化。在图 2-20 的下半部中描绘了当 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ 时场中 $\boldsymbol{E}$ 线的分布图。

值得注意，由本例可知，若 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，则 $E_1 > E_0$，这表明若电介质内部有了细长的夹杂物(如空气泡)，而夹杂物的介电常数小于周围介质的介电常数时，该处场强可能显著增强，在某些情况下，将导致放电并促进介质内部的击穿，最终使绝缘损坏(在 $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ 的极限情况下，$E_1 \approx 2E_0$)。

### 2.5.4 静电场解的惟一性

以工程问题为背景的数学物理方程的定解问题，必然要求回答解的存在、稳定及惟一性问题，即要求定解问题是适定的。解的存在是指在给定的定解条件下，方程是否有解；解的稳定性是指当定解条件的数值有细微变化时，解的值也只作细微的改变；解的惟一性是指在给定的定解条件下，所求得的解是否是惟一

的。静电场是客观存在的，因此电位的偏微分方程解的存在是确信无疑的。泊松方程和拉普拉斯方程解的稳定性在数学中已经得到证明。因此，下面将证明满足给定边值的泊松方程（拉普拉斯方程是其特殊情况）的解是惟一的解，这也就是通常所说静电场问题解答的惟一性。

图 2－21 所示为一充满均匀介质（介电常数为 $\varepsilon$）和置有 $n$ 个导体的场域。场域空间 $V$ 的边界为 $S_1$、$S_2$、…、$S_n$ 及外边界面 $S_0$。设 $V$ 中存在两个电位函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$，在给定第一类或第二类边值时，均满足泊松方程，即：

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2\varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

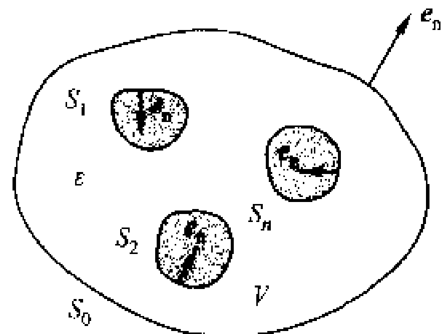



图 2－21 包围含有导体的场域 $V$ 的外边界面 $S_0$

令 $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_d$，显然，取决于算符 $\nabla^2$ 是线性算符，因此

$$\nabla^2\varphi_d = 0$$

而在导体边界上，电位是规定的，故必有 $\varphi_d = 0$。

利用场论中的格林公式［参见附录二中式(13)］，对已知的任意两个连续可导的标量函数 $\varphi$ 和 $\Psi$，应有

$$\int_V [\varphi\,\nabla^2\Psi + (\nabla\varphi\cdot\nabla\Psi)]\mathrm{d}V = \oint_S \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

若令 $\varphi = \Psi = \varphi_d$，代入上式得

$$\int_V (\nabla\varphi_d)^2\mathrm{d}V = \oint_S \varphi_d\frac{\partial\varphi_d}{\partial n}\mathrm{d}S \qquad (2-104)$$

如图 2－21 所示，上式中包围场域 $V$ 的边界面 $S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n$。因此，如果所设的这两个不同的电位函数的解答 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$，在全部边界面上都有相同的第一类边值，即 $\varphi_1\big|_{S_i} = \varphi_2\big|_{S_i} =$ 给定值（$i = 0, 1, \cdots, n$），或相同的第二类边值，即 $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_{S_i} = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_{S_i} =$ 给定值，则它们在相应边界面 $S_i$ 上的差值 $\varphi_d\big|_{S_i} = 0$ 或 $\dfrac{\partial\varphi_d}{\partial n}\bigg|_{S_i} = 0$。由此代入式(2－104)，即有

$$\int_V (\nabla\varphi_d)^2\mathrm{d}V = 0 \qquad (2-105)$$

由于上式中被积函数 $(\nabla\varphi_d)^2$ 恒为正值，所以惟当 $\nabla\varphi_d$ 恒为零时，式(2－105)才能成立。场域 $V$ 内 $\varphi_d$ 的梯度处处为零，即意味着 $V$ 内所有场点上的 $\varphi_d$ 值与其

在各导体表面 $S_1$、$S_2$、…、$S_n$ 上的值是相同的。因此，就第一类边值问题而言，由于在导体表面上已知 $\varphi_d=0$，故在整个场域内必有 $\varphi_d=0$。由此得证 $\varphi_1=\varphi_2$，即只有惟一可能的解答。

容易看出，如果给定的是第二类边值问题，即已知各导体表面上的面电荷分布$\left(\sigma=D_n=-\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$，则惟一性定理也是成立的。这是因为式(2-105)的成立，导致 $\varphi_d=C$（任意常数），即电位 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 之间可能相差一个常数，但电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的解答是惟一的。

静电场解的惟一性的重要意义在于，求解位场时，不论采用哪一种解法，只要所求的解答在场域内场源分布不变的前提下，满足给定的边界条件，就可确信该解答是正确的。由此往往可以不必直接求解泊松方程或拉普拉斯方程，而通过其他简便方法来求解静电场问题，下节镜像法即是基于这一原理的典型应用。

## 2.6 镜像法

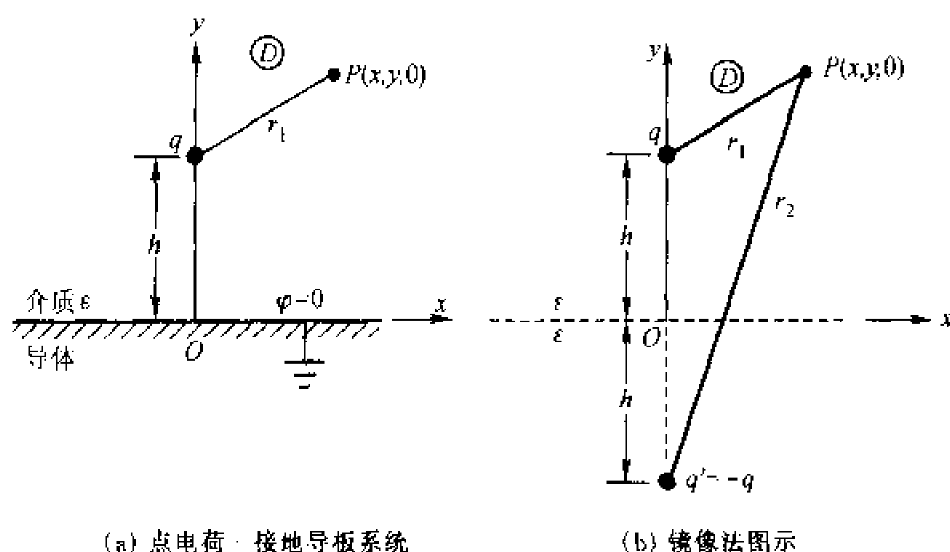
在典型化的点电荷电场边值问题中，当点电荷附近存在导体或介质时，由于点电荷电场的激励，在导体或介质界面上将呈现感应电荷或束缚电荷分布，因而场域中的电场是它们的合成电场。但是，界面上的感应电荷或束缚电荷分布是待定的未知量，无法应用叠加原理求该合成电场。然而，当界面形状比较规则（如平面、球面等）时，基于前述场的惟一性定理，可以采用镜像法求解。

镜像法的实质是以一个或多个位于场域边界外虚设的镜像（等效）电荷替代实际边界上未知的较为复杂的电荷分布，从而将原来具有边界的非均匀空间变换成无限大均匀媒质的空间，使分析计算过程得以明显简化。根据惟一性定理可知，这些等效电荷的引入必须维持原问题边界条件不变，这样，才能保证原场域中的静电场分布没有变化，同时，这也正是确定等效电荷量值和位置的依据。由于这些等效电荷有时可以简捷地置于镜像位置，故称作镜像电荷，而由此构成的分析方法即称为镜像法。

### 2.6.1 点电荷与无限大接地导电平面系统的电场

不难理解，大地上方传输线电场、雷电云形成的大气电场等工程问题，其典型化的最基本问题可归结为无限大接地导板上方点电荷激发的电场。

设有一点电荷 $q$ 位于距无限大接地导电平面上方 $h$ 处，其周围介质的介电常数为 $\varepsilon$，如图 2-22(a)所示。显然，就接地导板上方点电荷电场的分析而论，该轴对称电场是由点电荷 $q$ 与导板表面感应电荷共同产生的合成电场，虽然感




(a) 点电荷-接地导板系统　　(b) 镜像法图示

图 2-22　镜像法应用之一

应电荷面分布规律未知，但是导板接地（$\varphi=0$），使之可以表述为确定的边值问题，即在介质场域 $D$ 中电位 $\varphi$ 满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad （除去点电荷所在点）$$

边界条件为

$$\varphi|_{y=0} = 0$$

对应于这一边值问题，可以设想，如图 2-22(b)所示，在场域边界外引入一个与点电荷 $q$ 呈镜像对称的虚设的等效点电荷 $q'=-q$，并将原来的导体场域全由介电常数为 $\varepsilon$ 的介质所替换。这样，原场域边界面（$y=0$）上的边界条件 $\varphi=0$ 保持不变，而对应的边值问题被简化为同一均匀介质 $\varepsilon$ 空间内两个点电荷的电场问题。但必须强调指出的是，根据惟一性定理可知，等效替换的解答有效区域仅限于图 2-22(b)中上半部介质场域 $D$。

经镜像法处理后，待求场域 $D$ 中的电位 $\varphi$ 即可由点电荷 $q$ 及其镜像电荷 $q'$ 产生的电场相叠加，得

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,0) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-h)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+h)^2}}\right)\end{aligned}$$

由此可以求出导板上感应电荷的面密度分布为

$$\begin{aligned}\sigma &= D_n = \varepsilon E_y\\ &= -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0}\\ &= -\frac{qh}{2\pi(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

式中负号表示感应电荷与点电荷 $q$ 的极性相反。注意到导板上感应电荷分布 $\sigma=\sigma(\rho)$，采用位于 $xOz$ 平面的极坐标系，由元面积 $\mathrm{d}S=\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho$，故

$$\int_S \sigma \mathrm{d}S = -\frac{qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-q=q'$$

由此证明等效镜像电荷 $q'$ 确实表征了界面上全部感应电荷的效应，同时其镜像对称的位置使原问题边界条件得以满足。

对于由半无限大导电平面形成的劈形边界也可应用镜像法。但是仅当其夹角 $\alpha=\frac{\pi}{n}(n=2、3、4、\cdots)$，即为 $\pi$ 的整数分之一时，才可给出对应的若干镜像电荷分布，以保证劈形边界电位为零的边界条件。图 2-23 给出了对于夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的导电劈所引入的 5 个镜像电荷分布的示意图。

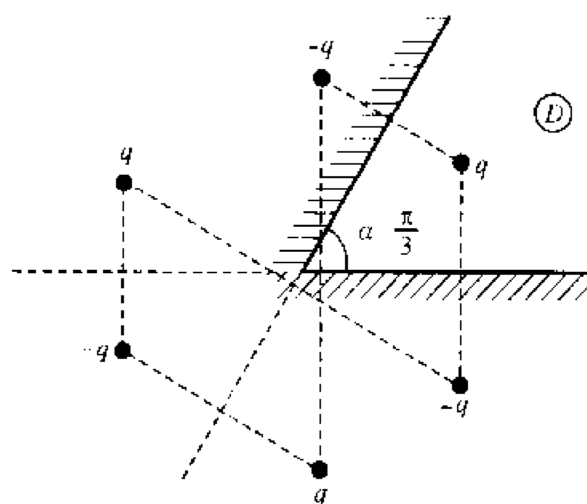
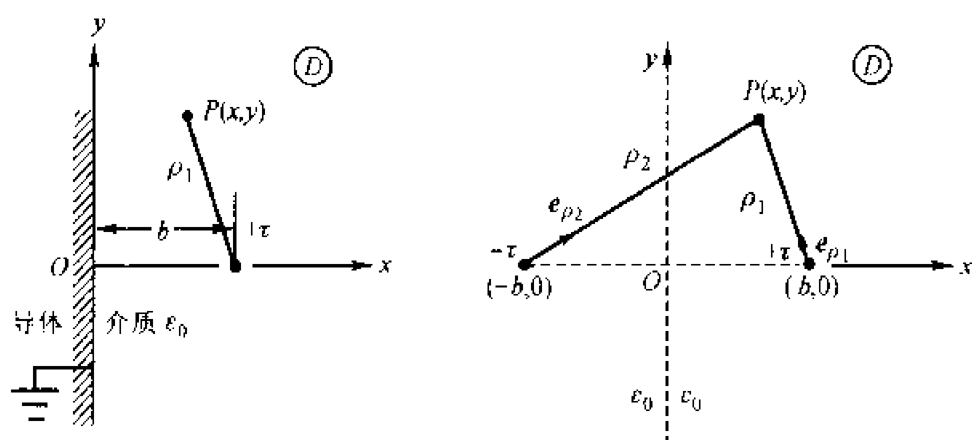



图 2-23　导电劈的镜像法

### 2.6.2　电轴与无限大接地导电平面系统的电场

通常将截面忽略不计的长直带电圆柱导线称为电轴，沿电轴电荷呈线电荷密度 $\tau$ 分布。设电轴位于无限大接地导电平面附近时，如图 2-24(a)所示，此时，线电荷 $\tau$ 可看作无限多个点电荷的集合，则根据叠加原理，可知镜像法应如图 2-24(b)所示。

待求场域 $D$ 中的电场为平行平面场问题，参照例 2-9，应用叠加原理，由高斯定理可以推出场中任一场点 $P$ 处的电场强度为




(a) 线电荷-接地导板系统　　　　(b) 镜像法图示

图 2-24　镜像法应用之二

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{E}'_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{E}''_{\mathrm{P}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho_1}\boldsymbol{e}_{\rho1}+\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho_2}\boldsymbol{e}_{\rho2}$$

现任取 $Q$ 点为电位参考点，由正、负线电荷在场点 $P$ 引起的电位分别为：

$$\varphi'_{\mathrm{P}}=\int_{\rho_1}^{\rho_{1Q}}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\rho_{1Q}-\ln\rho_1)$$

$$=C'_1-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho_1$$

和

$$\varphi''_{\mathrm{P}}=C''_1+\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho_2$$

合成电位

$$\varphi_{\mathrm{P}}=\varphi'_{\mathrm{P}}+\varphi''_{\mathrm{P}}=C_2+\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

设在 $\rho_1=\rho_2$ 处，$\varphi=0$，即电位参考点 $Q$ 选在 $y$ 轴上，则上式中 $C_2=0$，据此，场中任意点电位可表示成

$$\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}}\qquad(2-106)$$

鉴于工程上两线传输线电场等问题分析的需要，这里进一步分析由式(2-106)所描述的等位线图形。按等位线方程(1-21)，即应有 $\rho_2/\rho_1=K$，平方之，得

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}=\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}=K^2$$

经整理，可得

$$\left[x-\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right)b\right]^2+y^2=\left(\frac{2bK}{K^2-1}\right)^2\qquad(2-107)$$

这是直角坐标系中的圆方程。可见，在 $xOy$ 平面上，等位线分布是一簇圆，如图 2－25 中虚线所示。对应于某一给定的 $K$ 值，圆心坐标是 $\left[h\left(=\frac{K^2+1}{K^2-1}b\right),0\right]$，圆半径是 $a=\left|\frac{2bK}{K^2-1}\right|$。就每个等位圆轨迹而言，圆半径 $a$，圆心到原点的距离

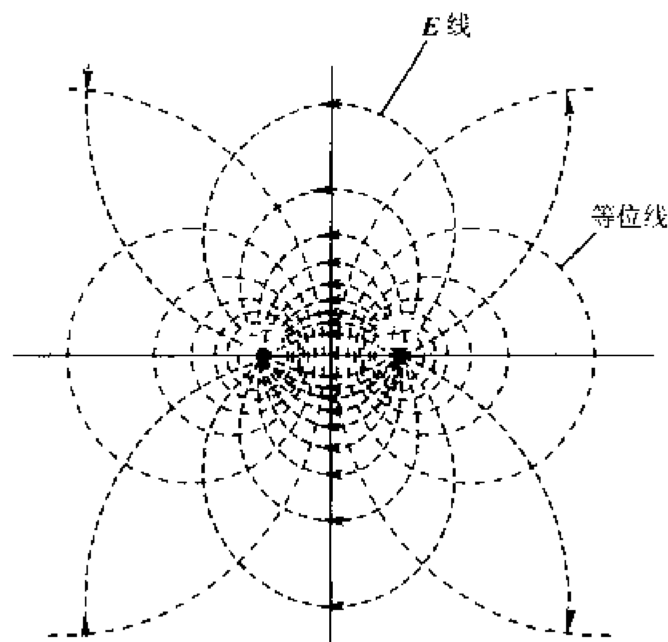



图 2－25　一对电轴($\pm\tau$)的电场

$h$，线电荷至原点的距离 $b$，三者间关系为

$$h^2=a^2+b^2 \tag{2-108}$$

亦即

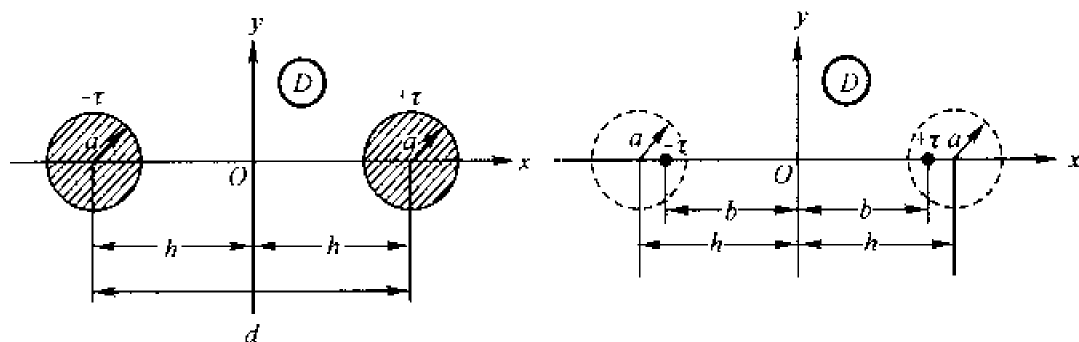
$$a^2=h^2-b^2=(h+b)(h-b) \tag{2-109}$$

这表明，两电轴($\pm\tau$)位置对每个等位圆的圆心来说，满足几何上反演的关系。此外，当 $P$ 点位于 $y$ 轴右侧时，因 $\rho_2/\rho_1=K>1$，由式(2－106)可知，$\varphi_P$ 皆为正值；当 $P$ 点位于 $y$ 轴左侧时，则 $\varphi_P$ 皆为负值。

## 2.6.3　电　轴　法

基于 2.6.2 节的分析，可以进而讨论两同半径、带有等量异号电荷的平行长直圆柱导线间的电场问题[图 2－26(a)]。由于两圆柱形带电导线的电场相互影响，使电荷在圆柱导线表面上呈不均匀分布形态，即导线表面电荷面密度 $\sigma$ 不是常量，但沿轴向每单位长度上的电荷分布(线密度 $\tau$)是相同的。注意到导线表面始终为一等位面，因此，若设想导线表面与图 2－25 中左右两侧相应的等位面相重合，则该平行导线外部的电场问题，就可用一对电轴的电场来等效替

代，如图 2－26(b)所示。这时，问题归结为确定等效电轴的位置，通常把这种方法称为电轴法。应指出，导线内部无电场，故在电轴法中等效替代的有效求解域纯指与原导线外部对应的场域 $D$。




(a) 同半径两线输电线系统　　(b) 电轴法图示

图 2－26　电轴法应用之一

如果两导线轴间距为 $d=2h$，导线半径均为 $a$，如图 2－26(a)所示，则根据式(2－108)，可求得等效电轴与原点距离 $b=\sqrt{h^2-a^2}$。

**例 2－15**　一半径为 $a$ 的传输线平行于地面，架设高度为 $h$，对地电位差为 $U_0$，如图 2－27 所示。

试求：(1) 大地上方传输线的电场；(2) 系统中最大场强的位置及其数值。

**[解]**　(1) 首先，应用镜像法给出传输线对地的镜像导线；然后，再应用电轴法，如图 2－28 所示，可确定等效电轴的位置为

$$b=\sqrt{h^2-a^2}$$

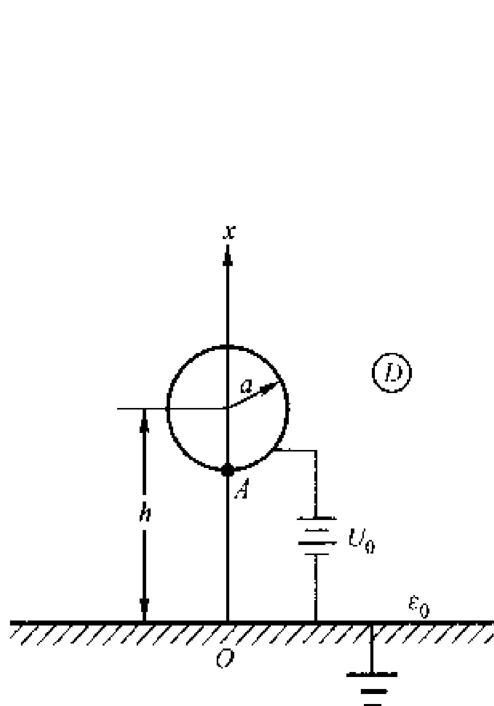



图 2－27　传输线的电场

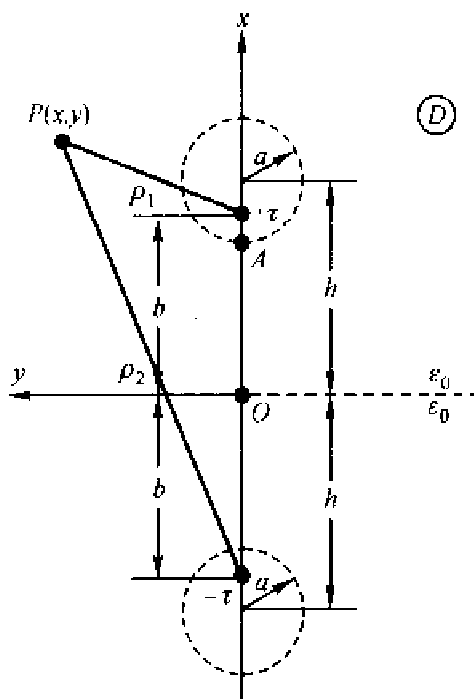



图 2－28　镜像法与电轴法的组合应用

从而大地上方任意场点 $P$ 处的电位 $\varphi$ 可由式(2－106)求得，即

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

但本例题设的给定条件为导线电位，故应建立等效电轴的线密度 $\tau$ 与给定电位边界条件间的关系式。为此，可合宜地选取传输线表面点 $A$，得出

$$\varphi_A = U_0 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{b+h-a}{a-(h-b)}\right]$$

即

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 U_0}{\ln\left[\frac{b+h-a}{a-(h-b)}\right]}$$

于是，大地上方传输线电场的电位应为

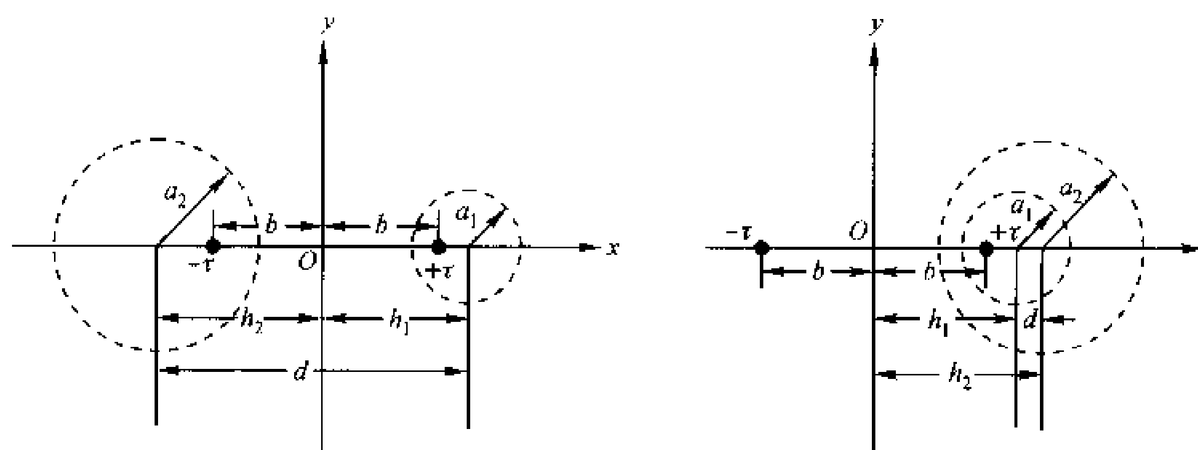
$$\varphi = \frac{U_0}{\ln\left[\frac{b+h-a}{a-(h-b)}\right]}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

(2) 基于电磁场的基本概念，可以判断本系统中最大场强将出现在导线相距地面最近处，即点 $A$ 处，应有

$$|\boldsymbol{E}_A| = E_{\max} = \left|-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{e}_n\right|_{\substack{x=h-a\\ y=0}} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=h-a\\ y=0}}$$

$$= \frac{2bU_0}{[(h-a)^2-b^2]\ln\left(\frac{b+h-a}{a-h+b}\right)}$$

电轴法的基本原理可推广应用于两不同半径、带有等量异号电荷的平行长直圆柱导线间的电场问题(图 2－29)。其中图 2－29(a)为平行传输线的电轴法示意图，两导线半径分别为 $a_1$ 和 $a_2$，线间距 $d = h_1 + h_2$；图 2－29(b)则为偏心




(a) 平行传输线的电轴法图示　　(b) 偏心同轴电缆的电轴法图示

图 2－29　电轴法应用之二与应用之三

同轴电缆的电轴法示意图，其内外导线半径分别为 $a_1$ 和 $a_2$，而两导体轴的偏心距为 $d=h_2-h_1$(设 $a_2>a_1$)。为研究这两种情况下的电场问题，只需求出假想的等效电轴位置 $b$。然后在给定 $\tau$ 或两导体间电位差 $U$ 的条件下，即可求其电场分布。关于电轴位置 $b$，根据电轴法关系式(2-108)，应有：

$$b^2 = h_1^2 - a_1^2$$

$$b^2 = h_2^2 - a_2^2$$

今已知 $a_1$、$a_2$ 和 $d$，因对应于图 2-29(a)和(b)两种情况，有

$$d = h_2 \pm h_1 \qquad [\text{正、负号分别与图 2-29(a) 和(b) 相对应}]$$

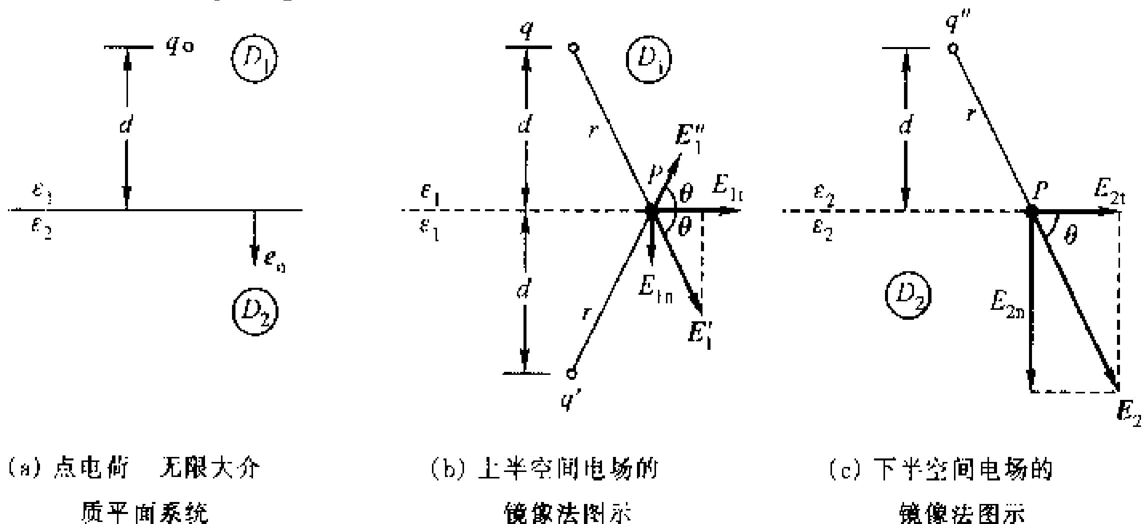
联立解之，即得：

$$h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d}$$

$$h_1 = \left| \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d} \right|$$

### 2.6.4 点电荷与无限大介质平面系统的电场

对于含有无限大介质平面的边值问题，也可采用镜像法。如图 2-30(a)所示，设点电荷 $q$ 位于由两种介质形成的无限大平面形的界面附近，此时，上下半无限空间中的电场是由点电荷 $q$ 及其边界面上的束缚电荷共同产生的。依据镜像法的基本思想，对于上半空间(介质为 $\varepsilon_1$)的电场，可归结为图 2-30(b)所示均匀介质 $\varepsilon_1$ 中两点电荷 $q$ 和 $q'$ 的合成电场的分析；对于下半空间(介质为 $\varepsilon_2$)的电场，可归结为图 2-30(c)所示均匀介质 $\varepsilon_2$ 中点电荷 $q''$ 电场的分析。引入的镜像电荷 $q'$ 及 $q''$ 的量值，可以通过分界面上的边界条件确定之。




(a) 点电荷 无限大介质平面系统

(b) 上半空间电场的镜像法图示

(c) 下半空间电场的镜像法图示

图 2-30 镜像法应用之三

参阅图 2－30(b)和(c)，对于分界面上任意点 $P$，根据分界面上的边界条件 $E_{1t}=E_{2t}$和 $D_{1n}=D_{2n}$，可分别列出方程：

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\theta$$

和

$$\frac{q}{4\pi r^2}\sin\theta-\frac{q'}{4\pi r^2}\sin\theta=\frac{q''}{4\pi r^2}\sin\theta$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}q'&=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\\ q''&=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\end{aligned}\right\}\tag{2－110}$$

从物理意义上可以理解，镜像电荷 $q'$反映了计算介质 $\varepsilon_1$ 中电场时，分界面上束缚电荷的效应。取决于 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 数值大小，$q'$可为正值，亦可为负值。对于镜像电荷 $q''$，若令 $q''=q+q'''$，则 $q'''$应反映计算介质 $\varepsilon_2$ 中电场时，分界面上束缚电荷的效应。

以上分析结果，可以推广至线电荷 $\tau$ 与无限大介质平面系统的电场，其计算式可类比推得。

### 2.6.5　点电荷与导体球系统的电场

首先讨论导体球接地的情况。如图 2－31(a)所示，导体球半径为 $a$，点电荷 $q$ 至球心距为 $d$。基于镜像法的基本原理，并由轴对称场的特征出发，可设等效于导体球表面感应电荷作用的镜像电荷($-q'$)应位于球心与点电荷的连线上，且令($-q'$)与球心相距为 $b$。由场的惟一性定理可知，该镜像电荷的量值 $q'$与位置 $b$，应由导体球表面的边界条件确定之。

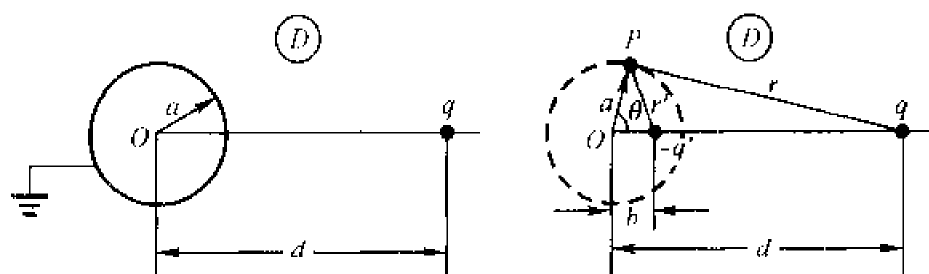
在导体球表面上任取一点 $P$，如图 2－31(b)所示，可得

$$\varphi_{\mathrm{P}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}=0$$

即

$$q^2/q'^2=r^2/r'^2=\frac{a^2+d^2-2ad\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

经整理，应有




(a) 点电荷-接地导体球系统　　　(b) 镜像法图示

图 2-31　镜像法应用之四

$$[q^2(a^2+b^2)-q'^2(a^2+d^2)]+2a(q'^2d-q^2b)\cos\theta=0$$

因上式在导体球面上恒成立，故必有

$$\left.\begin{aligned}&q^2(a^2+b^2)-q'^2(a^2+d^2)=0\\&q'^2d-q^2b=0\end{aligned}\right\}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}&a^2=bd\\&q'=\sqrt{\frac{b}{d}}q=\frac{a}{d}q\end{aligned}\right\}\tag{2-111}$$

应该指出，对于球心来说，点电荷 $q$ 和镜像电荷$(-q')$的位置满足互为反演点的几何关系。这样，根据 $q$ 及$(-q')$在均匀介质空间内的电场，即可方便地求得原点电荷与接地导体球系统的电场(注意：解答的有效区域!)。同样可以证明，接地导体球面上感应电荷总量等于$(-q')$。

现若导体球不接地，且呈电中性，则在位于点电荷一侧的导体球表面上的感应电荷为负值，而另一侧表面上的感应电荷为正值，且导体球表面上的正、负感应电荷的总量应等于零。因此，基于惟一性定理，并利用导体球接地情况下镜像法应用的结果，不难理解，此时若如图 2-31(b)所示引入上述镜像电荷$(-q')$，则为了满足电荷守恒定律，必须在原导体球域内再引入一个镜像电荷 $q''$，且令 $q''=-(-q')=q'$。显然，由点电荷 $q$ 和镜像电荷 $q'$、$q''$共同作用的合成电场，还必须保证球面边界是一个等位面的条件，因此，这表明镜像电荷 $q''$必须定位于球心。从而镜像法的应用使本问题仍被简化为均匀介质内三个点电荷的电场问题。

同理，可继续运用镜像法的基本原理，对呈电性(给定电位值或携带有给定电荷量)的不接地导体球，确定相应的镜像电荷组，以简化问题的求解。同样，还可以用来分析位于导体球腔内的点电荷电场问题。

**例 2-16** 一半径为 $a=10$ cm，对地电位差为 $U_0$ 的高压球形电极如图 2-32 设置，离地面高度为 $h=50$ cm。求该高压电极在大地上方形成的电场。

**[解]** 应该指出，由于地面的影响使导体球面上的电荷分布不均匀，无法应用直接求解法分析其电场分布。现本例组合应用导电平面与导体球的镜像法，分析如下：

首先，从导体球的给定电位 $U_0$ 出发，可如图 2-33 所示，在球心 $O$ 置一电荷 $q_1(q_1=4\pi\varepsilon_0 aU_0)$，但这时地面不能满足电位为零的等位面条件，为此，应在 $q_1$ 的镜像位置上置一镜像电荷 $q'=-q_1$，且大地下半部替换为空气介质 $\varepsilon_0$。然而，这样将破坏导体球的等位面条件，于是，按点电荷 $q'$ 与导体球的镜像法原则，在距球心 $O$ 为 $b=a^2/d=1$ cm 处，设置一个镜像电荷 $q_2=-(a/d)q'=(a/d)q_1=(1/10)q_1$，并移去导体球替换为空气介质 $\varepsilon_0$。这样，点电荷 $q'$ 与 $q_2$ 使导体球面处的电位为零，故导体球面处电位仍取决于 $q_1$ 保持为 $U_0$。但这又破坏了地面处的等位面条件，为此，再引入与 $q_2$ 互为镜像的又一镜像电荷 $q''=-q_2$。如此周而复始地循序探求相应的镜像电荷，即形成连续镜像法，其连续镜像的处置列于表 2-2。

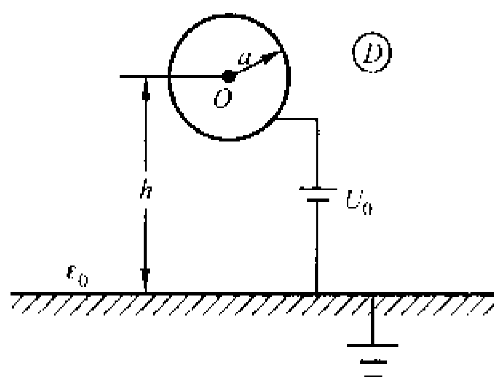



图 2-32 球-板电极系统

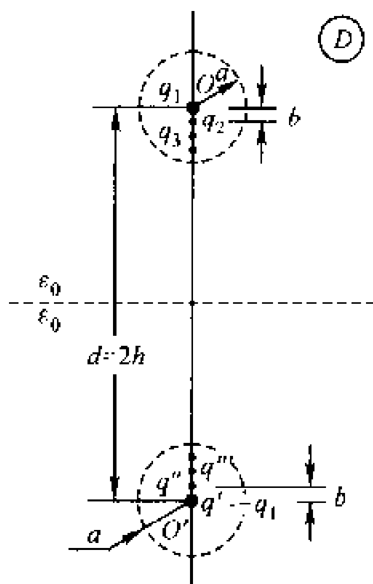



图 2-33 连续镜像法

由表 2-2 可见，各个镜像电荷值依次衰减很快，因此，整个问题是“收敛”的。最终所得连续镜像电荷组[位于原导体球内的镜像电荷($q_2$、$q_3$、$q_4$、…)与位于原大地下方相应的镜像位置上的镜像电荷($q'$、$q''$、$q'''$、…)]和设定的点电荷 $q_1$ 共同作用的合成电场，将保证满足原问题的边界条件，即 $\varphi|_{导体球}=U_0$ 和 $\varphi|_{地面}=0$。

表 2-2　例 2-16 的连续镜像法

| 导体球对地电位差 $U_0$ | | 大地电位 $\varphi=0$ | |
|---|---|---|---|
| 电荷值 | 位　置(cm)<br>(距球心 $O$ 距离) | 电荷值 | 位　置(cm)<br>(距球心 $O$ 的镜像 $O'$ 距离) |
| $q_1=4\pi\varepsilon_0 aU_0$ | 0 | $q'=-q_1$ | 0 |
| $q_2=\frac{a}{d}q_1$<br>$=\frac{1}{10}q_1$ | $b=\frac{a^2}{d}$<br>$=1$ | $q''=-q_2$ | 1 |
| $q_3=\frac{a}{d'}q_2$<br>$=\frac{10}{99}q_2=\frac{1}{99}q_1$ | $b'=\frac{a^2}{d'}$<br>$=\frac{100}{99}$ | $q'''=-q_3$ | $\frac{100}{99}$ |
| $q_4=\frac{a}{d''}q_3$<br>$=\frac{990}{9\,800}q_3$<br>$=\frac{1}{980}q_1$<br>$\left(d''=100-\frac{100}{99}\right)$ | $b''=\frac{a^2}{d''}$<br>$=\frac{99}{98}$ | $q''''=-q_4$ | $\frac{99}{98}$ |
| | …… | …… | |

在连续镜像法应用基础上，显然，本例待求的电场即等效替换为均匀介质 $\varepsilon_0$ 内由点电荷 $q_1$ 与上述连续镜像电荷组共同叠加产生的合成电场，使问题得以简洁、有效地获解，具体计算关系式此处从略。应指出，连续镜像法在电机齿、槽和变压器铁窗空间等漏磁场分析计算中均有实际的应用。

## 2.7　电容·部分电容

在物理学中已知，由导体组成的电容器，其电容参数 $C=q/U$ 与导体的形状、尺寸、相互位置及导体间的介质相关，但与导体带电情况无关。有时也涉及一个孤立导体的电容，这是指该导体与无限远处另一导体间的电容。如孤立导体带有电量 $q$ 后，它相对于无限远处的电位为 $\varphi$，则其电容 $C=q/\varphi$。但是在工程上许多电气设备往往具有两个以上相互绝缘的导体，形成多导体的带电系统，这时必须把原来的电容概念加以扩充，引入部分电容概念，从而得以讨论系统中导体间的电容。

无论是电容或部分电容均需运用场的观点，在相应的场分布分析的基础上，才能计算得出其实际参数值。

### 2.7.1 两导体系统的电容

对于实际电容参数的计算，可以在给定两导体携带的电量 $\pm q$ 或给定两导体电位差 $U$ 的条件下，通过场的分析，最终算出电容 $C=q/U$。

**例 2－17** 计算两线传输线的电容，有关尺寸请参阅图 2－26。

**[解]** 应用电轴法，首先确定电轴位置 $b=\sqrt{h^2-a^2}$，然后在式(2－106)所描述的场分布解答的基础上，选取位于两导线表面，且与两导线表面最近距离对应的点 $A_1[h-a,0]$ 和点 $A_2[-(h-a),0]$，即可得带有正、负电荷的两导线电位分别为：

$$\varphi_{A_1}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}\right]$$

和

$$\varphi_{A_2}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{b-(h-a)}{b+(h-a)}\right]$$

两导线间电压

$$U=\varphi_{A_1}-\varphi_{A_2}=\frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}\right]$$

从而可得两线传输线每单位长度的电容

$$C_l=\frac{\tau}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}\right]}$$

通常 $h\gg a$，因而 $b\approx h$，故

$$C_l=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{2h}{a}\right)} \qquad (2-112)$$

式中 $2h$ 为两导线间距，$a$ 为每一导线截面的半径。

**例 2－18** 计算球－板电极系统的电容，其结构与有关尺寸请参阅图 2－32。

**[解]** 本例在给定导体球与无限大导电平面电位差 $U_0$ 的条件下，可参照例 2－16 应用的连续镜像法，基于场的分析，得知导体球所充有的电荷量应为

$$\begin{aligned}q&=q_1+q_2+q_3+q_4+\cdots\\&=q_1\left(1+\frac{a}{d}+\frac{a}{d'}\cdot\frac{a}{d}+\frac{a}{d''}\cdot\frac{a}{d'}\cdot\frac{a}{d}+\cdots\right)\end{aligned}$$

式中 $d=2h$；$d'=d-b$；$d''=d-b'=d-a^2/d'$；…；$b=a^2/d$。鉴于镜像电荷值依次衰减很快，故若截断于第三项，则得

$$q\approx q_1\left[1+\frac{a}{d}+\frac{a^2}{d(d-b)}\right]$$

而已知 $q_1=4\pi\varepsilon_0 aU_0$，因此该系统的电容

$$C\approx\frac{q}{U_0}=4\pi\varepsilon_0 a\left[1+\frac{a}{d}+\frac{a^2}{d(d-b)}\right] \tag{2-113}$$

值得指出，如果导体球与导板间距离 $h\to\infty$，即形成孤立导体球的电极系统。此时由式(2-113)可见，该孤立导体球的电容

$$C=4\pi\varepsilon_0 a \tag{2-114}$$

### 2.7.2 多导体系统的电荷与电位·部分电容

如前所述，许多电气设备具有两个以上的导体而形成一个带电系统，例如三相输电线、多极电子管等。这时，对于多导体之间电容的计算，需要引入部分电容概念。

如果一个系统，其中电场分布只与系统内各带电体的形状、尺寸、相互位置和电介质的分布有关，而与系统外的带电体无关，并且所有电通[量]密度全部从系统内的带电体发出又全部终止于系统内的带电体上，则称为静电独立系统。现考察由$(n+1)$个导体组成的静电独立系统。令各导体按 $0\to n$ 顺序编号，其相应的带电量分别为 $q_0$、$q_1$、…、$q_k$、…、$q_n$，则必有

$$q_0+q_1+\cdots+q_k+\cdots+q_n=0 \tag{2-115}$$

显然，在多导体系统中，每个导体的电位不仅与导体本身电荷有关，同时还与其他导体上的电荷有关，因为周围导体上电荷的存在必然影响周围空间场的分布。因此，如果空间介质是线性的，且选取 0 号导体为电位参考点，即 $\varphi_0=0$，则应用叠加原理，可得每个导体电位与各个导体上电荷的关系为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\cdots+\alpha_{1k}q_k+\cdots+\alpha_{1n}q_n\\ &\cdots\\ \varphi_k&=\alpha_{k1}q_1+\alpha_{k2}q_2+\cdots+\alpha_{kk}q_k+\cdots+\alpha_{kn}q_n\\ &\cdots\\ \varphi_n&=\alpha_{n1}q_1+\alpha_{n2}q_2+\cdots+\alpha_{nk}q_k+\cdots+\alpha_{nn}q_n\end{aligned}\right\} \tag{2-116}$$

由于式(2-115)的关系，上式中没有出现 $q_0$。式(2-116)可记作矩阵形式为

$$\{\varphi\}=[\alpha]\{q\} \tag{2-117}$$

式中系数 $\alpha_{ij}$ 称为电位系数，其涵义不难从以下定义式得到理解

$$\alpha_{ij}=\left.\frac{\varphi_i}{q_j}\right|_{q_j\neq0,\text{其余导体}q_i\text{为零}} \tag{2-118}$$

下标相同的 $\alpha_{ii}$ 称为自有电位系数；下标互异的 $\alpha_{ij}$ 称为互有电位函数。电位系数只与导体的几何形状、尺寸、相互位置以及电介质的介电常数有关。

通常给定的不是各导体上的电荷，而是它们的电位或各个导体之间的电压，这些电位或电压是由对各导体充电的电源电势或电压来决定的。因此，理应通过方程(2－116)或(2－117)之逆问题求解，可得

$$\{q\} = [\alpha]^{-1}\{\varphi\} = [\beta]\{\varphi\} \tag{2-119}$$

即

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots + \beta_{1k}\varphi_k + \cdots + \beta_{1n}\varphi_n \\ &\cdots \\ q_k &= \beta_{k1}\varphi_1 + \beta_{k2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{kk}\varphi_k + \cdots + \beta_{kn}\varphi_n \\ &\cdots \\ q_n &= \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{nk}\varphi_k + \cdots + \beta_{nn}\varphi_n \end{aligned}\right\} \tag{2-120}$$

式中系数 $\beta_{ij}$ 称为感应系数，它们和电位系数之间的关系为

$$\beta_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta} \tag{2-121}$$

式中 $\Delta$ 是 $[\alpha]$ 的行列式的值；$A_{ji}$ 是相应的余因式。同样，下标相同的 $\beta_{ii}$ 称为自有感应系数；下标互异的 $\beta_{ij}$ 称为互有感应系数。其涵义可从下列关系式看出：

$$\beta_{ij} = \left.\frac{q_i}{\varphi_j}\right|_{\varphi_j \neq 0,\text{其余导体接地，电位为零}} \tag{2-122}$$

因而感应系数也只和所有导体的几何形状、尺寸、相互位置以及介质的介电常数有关。

由上分析可见，所有电位系数都是正值；而在感应系数中，$\beta_{ii}$ 恒为正值，但 $\beta_{ij}(i \neq j)$ 则恒为负值。为避免使用负的感应系数，将电荷与电位之间的关系通过所谓部分电容 $C_{ij}$ 来表示，将相当简明(图 2－34 示出三导体系统中的各个部分电容)。对一般由 $(n+1)$ 个导体组成的系统，可表示成

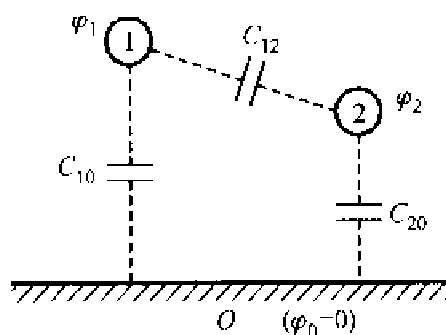



图 2－34 大地上方两线传输线系统中的各个部分电容

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{10}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \cdots + C_{1k}(\varphi_1 - \varphi_k) + \cdots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n) \\ &\cdots \\ q_k &= C_{k1}(\varphi_k - \varphi_1) + C_{k2}(\varphi_k - \varphi_2) + \cdots + C_{k0}(\varphi_k - \varphi_0) + \cdots + C_{kn}(\varphi_k - \varphi_n) \\ &\cdots \\ q_n &= C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) + \cdots + C_{nk}(\varphi_n - \varphi_k) + \cdots + C_{n0}(\varphi_n - \varphi_0) \end{aligned}\right\}$$

(2－123)

比较方程(2－120)和(2－123)，就可得出以感应系数表示部分电容的计算关系式。若令 $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_k = \cdots = \varphi_n = 1$，则通过对应于 $q_i(i = 1, \cdots, n)$ 的

表达式，由比较系数法即可知

$$C_{i0}=\beta_{i1}+\beta_{i2}+\cdots+\beta_{ii}+\cdots+\beta_{in} \qquad (2-124)$$

又若令 $\varphi_1=\varphi_3=\cdots=\varphi_n=1$，而 $\varphi_2=0$，则仍由以上两方程及式(2-124)，可得

$$C_{10}+C_{12}=\beta_{11}+\beta_{13}+\cdots+\beta_{1n}=C_{10}-\beta_{12}$$

由此

$$C_{12}=-\beta_{12}$$

同理可知

$$C_{ij}=-\beta_{ij}(i\text{ 或 }j=1,\cdots,n,\text{且 }i\neq j) \qquad (2-125)$$

式(2-124)中，$C_{i0}(i=1,\cdots,n)$称为自有部分电容，即各导体与0号导体(亦即选为电位参考点的导体)间的部分电容；另一类由式(2-125)给出的 $C_{ij}$，称为互有部分电容，即相应的两个导体间的部分电容。所有部分电容恒为正值，且 $C_{ij}=C_{ji}$。

对于由$(n+1)$个导体组成的静电独立系统，由上述分析可以推论，因每两个导体之间都有部分电容存在，总共应有 $C_{n+1}^2=n(n+1)/2$ 个部分电容。

在理论分析中，可以通过计算 $\alpha_{ij}$、$\beta_{ij}$求 $C_{ij}$。但是，$\beta_{ij}$也可用实验方法测得，因此按式(2-124)和(2-125)，由实测同样可求得部分电容值。

**例 2-19** 如图 2-34 所示，试求考虑大地影响时两线输电线系统的各个部分电容，以及两线输电线间的等值电容(工作电容)。设两输电线距地面高度分别为 $h_1$、$h_2$，线间距为 $d$，导线半径为 $a$，且 $a\ll d$，$a\ll h_1$ 和 $h_2$，如图 2-35(a)所示。

**[解]** 根据镜像法，并设电轴与导线几何轴线相重，如图 2-35(b)所示。则导线电位

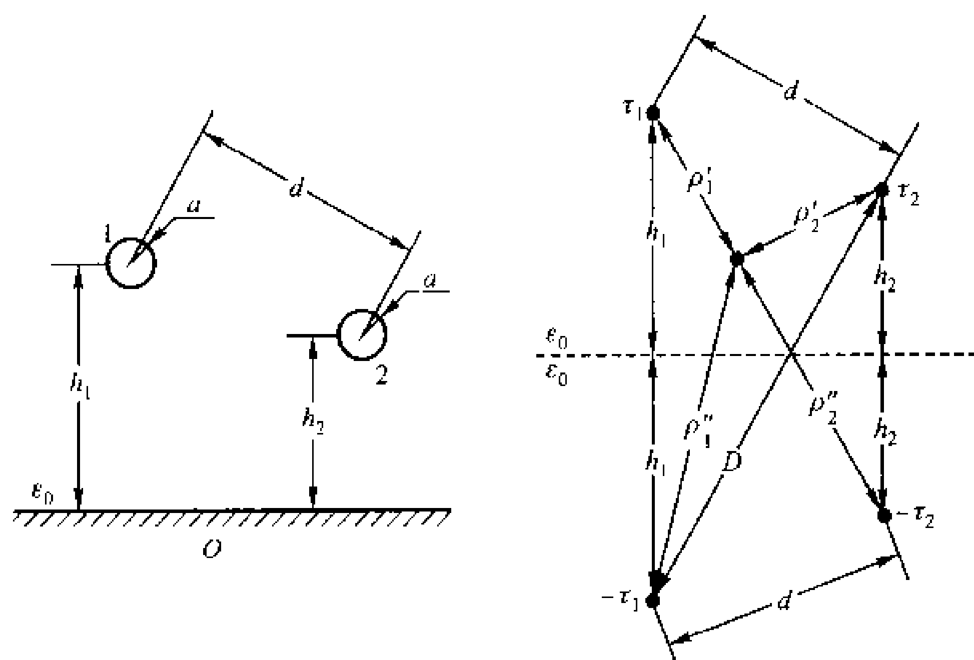
$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2h_1}{a}\right)+\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D}{d}\right)\\&=\alpha_{11}\tau_1+\alpha_{12}\tau_2\\\varphi_2&=\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D}{d}\right)+\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2h_2}{a}\right)\\&=\alpha_{21}\tau_1+\alpha_{22}\tau_2\end{aligned}\right\}$$

各个部分电容为：

$$C_{12}=C_{21}=-\beta_{21}=\frac{\alpha_{21}}{\Delta},\quad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}$$

$$C_{10}=\beta_{11}+\beta_{12}=\frac{\alpha_{22}-\alpha_{12}}{\Delta}$$

$$C_{20}=\beta_{21}+\beta_{22}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{21}}{\Delta}$$




(a) 大地上方两线输电线系统　　　　(b) 镜像法图示

图 2-35　部分电容计算用图

通常 $h_1 = h_2 = h$，可简化计算过程，即有 $D = \sqrt{4h^2 + d^2}$，$\ln\left(\dfrac{D}{d}\right) = \ln\left[\left(\dfrac{2h}{d}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}$，于是对应于线长为 $l$ 的该输电线系统的各个部分电容分别为

$$C_{10} = C_{20} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left[\dfrac{2h}{a}\sqrt{\left(\dfrac{2h}{d}\right)^2 + 1}\right]}$$

和

$$C_{12} = C_{21} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l \cdot \ln\left[\sqrt{\left(\dfrac{2h}{d}\right)^2 + 1}\right]}{\ln\left[\dfrac{2h}{a}\sqrt{\left(\dfrac{2h}{d}\right)^2 + 1}\right] \cdot \ln\left[\dfrac{2h}{a}\left(\sqrt{\left(\dfrac{2h}{d}\right)^2 + 1}\right)^{-1}\right]}$$

可以指出，若输电线距地面高度足以忽略大地影响时，则上式中 $C_{12}$ 的表达式将可简化为与式(2-112)一致的结果(即 $C_{12} = C_l l$)。

关于两线传输线间等值电容(工作电容)$C_e$ 的计算，根据图 2-34，分析由该系统部分电容组成的电网络，显然，按电网络入端等值参数的计算方法可知

$$C_e = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10} + C_{20}}$$

### 2.7.3 静电屏蔽

2.3.1 节中已经提及导体静电屏蔽的功能。由于部分电容表示了导体之间通过电场所体现的电耦合特性，因此运用这一概念可以简明有效地阐明静电屏蔽问题。

设带电的电气设备以导体 1 表示，带电荷为 $q_1$，且被置于接地导体薄壳 2 中，它们与邻近的导体 3 一起组成三导体系统，如图 2－36 所示。由式(2－123)，以 $\varphi_2=\varphi_0=0$ 代入，可得

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{10}\varphi_1 + C_{12}\varphi_1 + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) \\ q_2 &= C_{21}(-\varphi_1) + C_{20}\times 0 + C_{23}(-\varphi_3) \\ q_3 &= C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}\varphi_3 + C_{30}\varphi_3 \end{aligned}\right\}$$

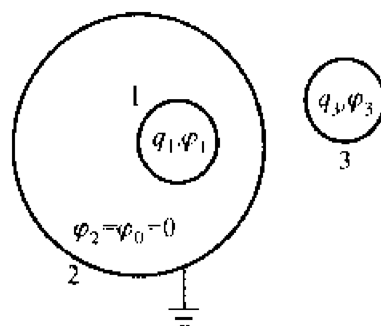



图 2－36 静电屏蔽功能的示意图

因上式在任何情况下均应成立，可令 $q_1=0$，此时导体 2 内部为等电位区，故由 $\varphi_2=0$，可知 $\varphi_1=0$。这样，第一式即为

$$0 = -C_{13}\varphi_3$$

因 $\varphi_3$ 可以不等于零，由此可得 $C_{13}=0$。这表明因接地导体 2 包围导体 1 后，导体 1 与导体 3 被互相隔离，而不存在静电耦合作用。如果导体 1、3 均带电，则应有：

$$q_1 = (C_{10} + C_{12})\varphi_1$$

$$q_3 = (C_{32} + C_{30})\varphi_3$$

由此表明，因接地导体 2 的静电屏蔽功能，使其内外形成为两个相互独立的静电系统。工程上，高压工作室内的接地金属网；整流电源中的变压器，在其原、副绕组之间安放金属薄片或绕上一层漆包线并使之接地，都是静电屏蔽的应用实例。

## 2.8 静电场能量

静电场中的带电体受到电场力作用，会产生运动，这一事实说明静电场有作功的能力，而作功必须消耗能量，由此可见，静电场是具有能量的。如果静止带电体在外力作用下由无限远处移入静电场中，则外力必须反抗电场力作功，这部分功将转变为静电场的能量存储在场中，使静电场能量增加。因此，根据能量守恒定律，可以从电场力作功或外力作功与静电场能量之间的关系导出带电体系统的静电场能量的计算公式。

从场的观点来看，能量是场的物质性的基本属性之一。因此静电场能量应分布在整个场域空间，也就可以通过能量分布密度的体积分来计算静电场的能量。

本节即从上述两个方面着手，分别给出静电场能量的计算关系式。

### 2.8.1 带电体系统中的静电场能量

首先，分析电荷作任意分布时带电系统所具有的静电场能量。设电荷的体密度是 $\rho$，面密度是 $\sigma$，且电介质为线性介质。如果在建立该带电系统电场的某一瞬时，场中某一点的电位是 $\varphi'(\boldsymbol{r})$，则根据式(2-13)，对该点引入增量电荷 $\delta q$，需作功

$$\delta W = \varphi'(\boldsymbol{r})\delta q \tag{2-126}$$

将转化为静电场能量存储在场中。式中 $\delta q = \delta\rho\Delta V$ 或 $\delta q = \delta\sigma\Delta S$。对应于电场建立的全过程，总电场能量可由式(2-126)的积分得出。

静电场是保守力场，其场能量仅取决于电荷的最终分布状态，而与电荷怎样达到该状态的过程无关。因此，可设想这样一种充电方式，使任何瞬间所有带电体的电荷密度都按同一比例增长。令此比例系数为 $m(0\leqslant m\leqslant 1)$，即 $m$ 是变量，充电开始时各处电荷密度都为零(相当于 $m=0$)；充电结束时各处电荷密度都等于其最终值(相当于 $m=1$)。由此可知，在充电过程中的任何时刻，电荷密度的增量

$$\delta\rho = \delta[m\rho(\boldsymbol{r})] = \rho(\boldsymbol{r})\delta m$$

和

$$\delta\sigma = \delta[m\sigma(\boldsymbol{r})] = \sigma(\boldsymbol{r})\delta m$$

按式(2-126)积分而得的总静电能量为

$$W_e = \int_0^1 \delta m \int_V \rho(\boldsymbol{r})\varphi'(m,\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \int_0^1 \delta m \int_S \sigma(\boldsymbol{r})\varphi'(m,\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{2-127}$$

由于所有电荷按同一比例 $m$ 增长，故电位 $\varphi'(m,\boldsymbol{r}) = m\varphi(\boldsymbol{r})$，式中 $\varphi(\boldsymbol{r})$是充电终状态所对应的电位值。将此关系代入式(2-127)，得

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\mathrm{d}S \tag{2-128}$$

对于系统中无空间电荷，只有带电导体的情况，其电场能量可表示成

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\mathrm{d}S \tag{2-129}$$

式中的积分面积 $S$ 应为全部导体表面。由于每一导体表面都是等位面，而对于第 $k$ 个导体，可有

$$\frac{1}{2}\int_{S_k}\sigma\varphi \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\varphi_k\int_{S_k}\sigma \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\varphi_k q_k \qquad (k = 1,\cdots,n)$$

从而,式(2-129)也可写成

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k \tag{2-130}$$

## 2.8.2 静电能量的分布及其分布密度

不失讨论的一般性,现从两个带电导体在无界空间建立的静电场出发,研究其能量分布密度。设该两导体携带的电量分别为 $q_1$ 和 $q_2$,其表面积对应为 $S_1$ 和 $S_2$,如图2-37所示。由式(2-129)可得该系统的总静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2}\oint_{S_1}\sigma\varphi \mathrm{d}S + \frac{1}{2}\oint_{S_2}\sigma\varphi \mathrm{d}S$$

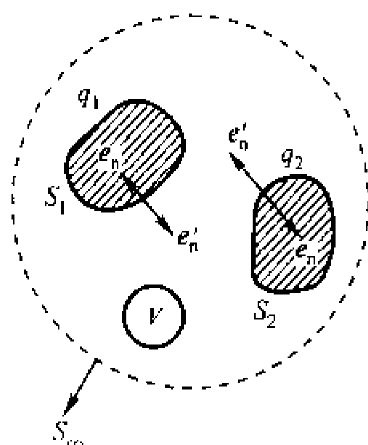



图2-37 带电系统的静电能量分布

今知导体表面的电荷面密度[式(2-60)]为

$$\sigma = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_n' = -\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_n$$

式中 $\boldsymbol{e}_n'$ 为导体表面的外法线方向的单位矢量;$\boldsymbol{e}_n$ 为导体表面的内法线方向上的单位矢量。将此式代入前式,得

$$W_e = -\frac{1}{2}\oint_{S_1}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \frac{1}{2}\oint_{S_2}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S$。若在无限远处如图示作一个无限大的球面 $S_\infty$,则由于电荷分布在有限区域,无限远处的场强按 $R^{-2}$ 及电位按 $R^{-1}$ 趋于零。因此,积分

$$\oint_{S_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \to 0$$

所以前述的系统总静电能量可再写为

$$W_e = -\frac{1}{2}\oint_{S_1}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \frac{1}{2}\oint_{S_2}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \frac{1}{2}\oint_{S_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{S}\varphi\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中 $S = S_1 + S_2 + S_\infty$。该闭合面 $S$ 包围了整个静电场分布的空间 $V$。应用高斯定理,并由附录二恒等式(4),上式可改写为

$$W_e = -\frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{D}) \mathrm{d}V$$

$$= -\frac{1}{2}\int_V (\varphi \nabla \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \cdot \nabla\varphi) \mathrm{d}V$$

考虑到场域中没有自由电荷分布，故$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$，又由 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$，代入上式，最终得

$$W_e = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\right) \mathrm{d}V \tag{2-131}$$

由此可见，电场能量是以体密度

$$w_e' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) \tag{2-132}$$

分布于整个电场中。对于各向同性的线性介质，$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，代入上式，得

$$w_e' = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tag{2-133}$$

此式表明，在各向同性的线性介质中，任一场点上的能量密度等于该点处介电常数与场强平方乘积的二分之一。该式也表明，静电场能量与场强平方成正比。因此，场能量不符合叠加原理。这就是说，虽然几个带电体在空间产生的电场强度等于各个带电体分别产生的电场强度的矢量和，但是，其总电场能量并不等于各个带电体单独存在时各自具有的场能量之和。事实上，这是因为当第二个带电体引入系统时，外力必须反抗第一个带电体对第二个带电体产生的电场力而作功，此功即转变为电场能量，这部分能量通常称为互有能，而带电体单独存在时具有的能量称为固有能。应该指出，在计算由 $n$ 个带电体组成的带电系统电场能量时[式(2-130)]，令各个带电体的电量同时增长，这样，其中的电位 $\varphi_k$，除了由其余各个带电体所产生外，也包括了第 $k$ 号带电体自身电荷 $q_k$ 的贡献。因此，它既包括了互有能又计及了固有能。

**例 2-20**　试计算半径为 $a$，带电量为 $q$ 的孤立导体球所具有的静电能量。导体周围介质的介电常数为 $\varepsilon$。

**[解]**　本例可采用二种方法进行计算

(1) 应用式(2-130)，因孤立导体球的电位 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon a}$，代入即得

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon a} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

(2) 应用式(2-131)

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = \frac{1}{2\varepsilon}\int_V D^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2\varepsilon}\int_a^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

(3) 基于式(2-130),对于两导体系统,若引入电容参数 $C=q/U$,并注意该系统中 $q_1=-q_2=q$,则电场能量 $W_e=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\varphi_k q_k=\frac{1}{2}q(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{q^2}{2C}$。因此,在已知孤立导体球的电容[式(2-114)]情况下,待求的静电场能量

$$W_e=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

三种方法所得结果相同。

## 2.9 电场力

已如前述,静电场对电荷的作用力,即所谓电场力或称库仑力,是静电场具有能量的一种体现。对于电场力的计算,原则上可应用电场强度的定义公式[式(1-6)],即点电荷 $q'$ 受到的电场力为

$$\boldsymbol{F}=q'\boldsymbol{E} \tag{2-134}$$

应注意,式中 $\boldsymbol{E}$ 是除电荷 $q'$ 外其余电荷在该电荷所在处产生的场强。如果 $\boldsymbol{E}$ 为点电荷 $q$ 产生的电场强度,则由式(2-21)代入式(2-134),便得点电荷 $q'$ 受到点电荷 $q$ 的作用力,或者说,点电荷 $q$ 对于点电荷 $q'$ 的作用力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2-135}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为由 $q$ 指向 $q'$ 的单位矢量。上式就是静电的基本实验定律——库仑定律。

综上所述,已知带电体的电荷分布,原则上,由式(2-134)或(2-135)可以计算带电体电荷之间的电场力。但是,对于电荷分布形态复杂的带电系统,根据上述 $\boldsymbol{E}$ 的定义公式或库仑定律计算电场力是非常困难的,甚至是无法求积的。为此,引入虚位移法,通过假设带电体发生一定的位移,由位移过程中电场能量的变化与外力及电场力作功之间的关系计算电场力。

为应用虚位移法,首先要介绍广义坐标和广义力两个概念。广义坐标是确定系统中各带电体形状、尺寸和位置的一组独立几何量,而企图改变某一广义坐标的力,就称为对应于该广义坐标的广义力。广义力和广义坐标间的关系,应满足一个共同的条件,即广义力乘上由它引起的广义坐标的增量,应等于功。因此,分别与广义坐标——如距离、面积、体积和角度等对应的广义力是通常的机械力、表面张力、压强和转矩等。

现研究 $(n+1)$ 个导体组成的系统,对导体依次编号,并以 0 号导体为参考

导体，假定除 $p$ 号导体外其余导体都不动，且 $p$ 号导体也只有一个广义坐标 $g$ 发生所设想的位移(虚位移)$\mathrm{d}g$。这时，该系统发生的功能过程如下

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}_g W_e + F\mathrm{d}g \tag{2-136}$$

式中 $\mathrm{d}W(=\sum \varphi_k \mathrm{d}q_k)$ 表示与各带电体相连接的电源提供的能量，等号右边两项分别表示静电能量的增量和电场力所作的功。取决于系统设定的求解条件，有以下两类电场力计算关系式：

(1) 常电位系统：这时设定各带电体的电位保持不变，根据式(2-130)

$$\mathrm{d}_g W_e \Big|_{\varphi_k = 常量} = \frac{1}{2}\sum \varphi_k \mathrm{d}q_k$$

即静电能量的增量，等于外源所提供的能量之半。也就是说，外源提供的能量，有一半作为电场储能的增量，根据式(2-136)，显然另一半用于机械功。因而

$$F\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\mathrm{d}W = \mathrm{d}_g W_e \Big|_{\varphi_k = 常量}$$

由此得广义力

$$F = \frac{\mathrm{d}_g W_e}{\mathrm{d}g}\Big|_{\varphi_k = 常量} = \frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{\varphi_k = 常量} \tag{2-137}$$

(2) 常电荷系统：这时设定各带电体的电荷保持不变，也就是说，当 $p$ 号导体发生虚位移时，所有带电体都不和外源相连，因而 $\mathrm{d}q_k = 0$，即 $\mathrm{d}W = 0$。由此式(2-136)可写成

$$0 = \mathrm{d}_g W_e + F\mathrm{d}g$$

从而得

$$F = -\frac{\mathrm{d}_g W_e}{\mathrm{d}g}\Big|_{q_k = 常量} = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{q_k = 常量} \tag{2-138}$$

在这种情况下，外源被隔绝，电场力作功所需的能量惟有取自于系统内电场能量的减少值。

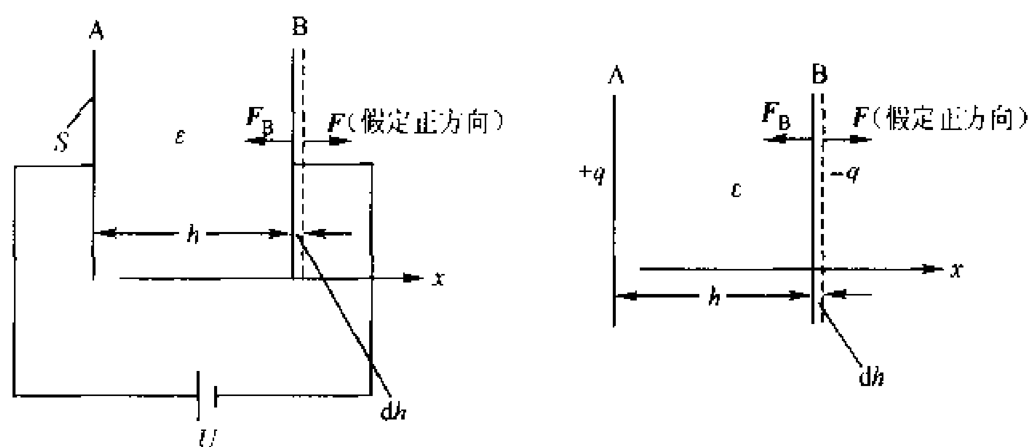
以上两种情况所得结果应该是相同的。因为实际上带电体并没有发生位移，电场分布当然也没有变化，求得的是所论系统对应于同一状态的电荷和电位情况下的力。因此有

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{\varphi_k = 常量} = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{q_k = 常量} \tag{2-139}$$

**例 2-21** 设平行板电容器的极板面积为 $S$、板间距离为 $h$，忽略极板的边缘效应。试应用虚位移法计算平行板电容器两极板之间的作用力。

**[解]** 本例可以在设定为常电位系统[图 2-38(a)]或常电荷系统[图 2-38(b)]的求解条件下，进行极板受力的计算。图中取负极板为分析对象。

(1) 若设定为常电位系统，即相当于给定极板间电压 $U$，则根据式




(a) 常电位系统　　　　(b) 常电荷系统

图 2－38　平行板电容器极板受力计算的虚位移法图示

(2－137),且由两导体系统的电场能量 $W_e=\frac{1}{2}CU^2$,以及平行板电容器的电容 $C=\varepsilon S/h$,可得负极板受力

$$F=\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k=C}=\left.\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{2}CU^2\right)\right|_{\varphi_k=C}$$

$$=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial h}=\frac{U^2}{2}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\varepsilon S}{h}\right)=-\frac{\varepsilon SU^2}{2h^2}$$

式中负号表示电场力 $\boldsymbol{F}$ 的实际方向与假定正方向(即广义坐标 $h$ 增加的方向)恰好相反,所以

$$\boldsymbol{F}_B=-\frac{\varepsilon SU^2}{2h^2}\boldsymbol{e}_x\qquad(单位:N)$$

(2) 若设定为常电荷系统,即给定两极板上的电荷 $+q$ 和 $-q$,则根据式(2－138),且由该电容器的电场能量 $W_e=\frac{q^2}{2C}$,可得负极板受力

$$F=-\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q_k=C}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{q^2}{2C}\right)=\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{h}{\varepsilon S}\right)$$

$$=-\frac{q^2}{2\varepsilon S}$$

同前理

$$\boldsymbol{F}_B=-\frac{q^2}{2\varepsilon S}\boldsymbol{e}_x\qquad(单位:N)$$

显然，对应于平板电容器的同一状态，应有 $q = CU$。因此，不难看出，上述两计算结果是等同的。同理，可得正极板受力为 $\boldsymbol{F}_A = \frac{q^2}{2\varepsilon S}\boldsymbol{e}_x = \frac{\varepsilon SU^2}{2h^2}\boldsymbol{e}_x$。

最后，介绍基于法拉第观点计算电场力的方法。法拉第认为，电磁场中的机械力都归结为电磁场内部的力。也就是说，电磁力通过媒质以连续的方式进行传递。因此，法拉第观点是：在电场中的每一段电位移管，沿其轴线方向受到纵张力，而在垂直于轴线方向，则受到侧压力作用。纵张力与侧压力的量值相等，都等于 $\frac{1}{2}DE$，单位是 $N/m^2$（牛/米$^2$）。这样，电位移管本身可看作被拉紧了的橡皮筋，沿轴线方向，它有收缩的倾向，而在垂直于轴线方向，它有扩张的趋势。

应用法拉第观点，结合场图，就可对带电体受力状况作出由定性直至定量的分析。

**例 2-22** 试应用法拉第观点计算例 2-21 中平行板电容器两极板之间的作用力。

［**解**］ 如图 2-39 所示，取正极板为分析对象，沿电场方向在极板处截取一段很短的电位移（$\boldsymbol{D}$）管，设该管的截面积为 $\Delta S$。显然，因极板之间的均匀场决定了侧压力 $F' = F''$，这表明该 $\boldsymbol{D}$ 管在垂直于轴线方向上受力平衡。已知极板内 $E_1 = D_1 = 0$，故左侧纵张力 $F_1 = 0$。令所取 $\boldsymbol{D}$ 管的长度趋向于零，则右侧纵张力 $\boldsymbol{F}_2$ 即为作用于极板上的每单位面积上的电场力，其值为

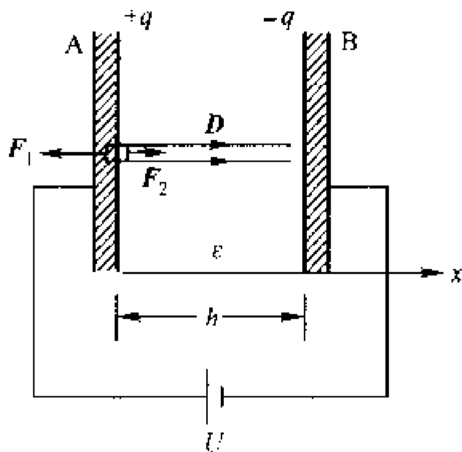



图 2-39 应用法拉第观点求电场力

$$F_2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{U}{h}\right)^2 = \frac{\varepsilon U^2}{2h^2} \quad (\text{单位}:N/m^2)$$

因而极板受力

$$\boldsymbol{F}_A = (F_2 \cdot S)\boldsymbol{e}_x = \frac{\varepsilon SU^2}{2h^2}\boldsymbol{e}_x$$

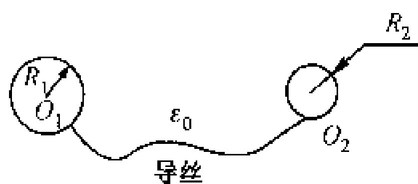
以上结果与例 2-21 计算结果相同。

## 习　题

**2-1** 真空中有两个同号点电荷：$q_1(=q)$ 和 $q_2(=3q)$，它们的距离为 $d$。试决定在其连线上，哪一点的电场强度为零；哪一点上由该两电荷所引起的电场强度值相等，方向一致。

**2-2** 真空中沿一正方形的两对角边分别放置长度为 $l$ 的细导线，它们分别带有等量而异号、均匀分布的电荷 $+q$ 和 $(-q)$。试求正方形中心点的电场强度。

**2-3** 两个半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 的导体球，相距甚远（可分别看作为孤立的导体球），其中球 1 带有电量为 $q$，球 2 不带电。现用一根细长的导丝连接两球，且在分析中忽略该导丝对空间电场分布的影响。求：




题 2-3 图

(1) 两个球上的电荷量；

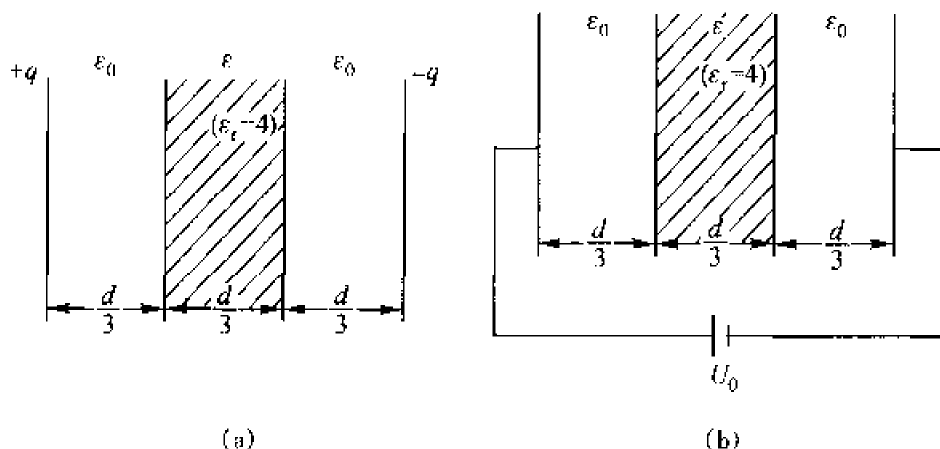
(2) 两个球上的电场强度；

(3) 概括电荷与电场强度分布的规律性。

**2-4** 一平行板电容器，板间距离为 $d$，介质为空气（$\varepsilon \approx \varepsilon_0$），忽略边缘效应。求：

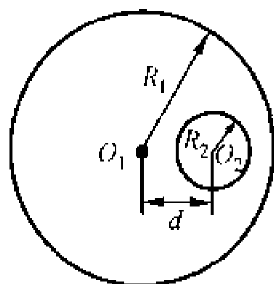
(1) 若如题 2-4(a)图所示，插入一块 $\varepsilon_r = 4$ 的介质，试计算电容器中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 有无变化？板间电压有无变化？

(2) 若如题 2-4(b)图所示，插入介质（$\varepsilon_r = 4$），同样计算电容器中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 有无变化？极板上的电荷量有无变化？

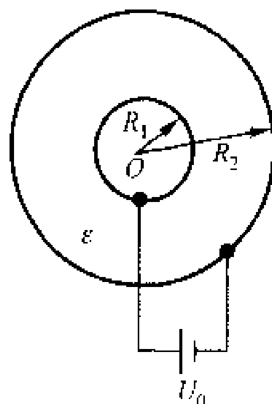



题 2-4 图

**2-5** 已知一半径为 $R_1$ 的长直圆柱，离其轴线 $d$ 处有一个半径为 $R_2$ 的小圆柱，设在大小圆柱间均匀分布着电荷体密度 $\rho_0$，如题 2-5 图所示。试求小圆柱内的 $\boldsymbol{E}$。




题 2-5 图




题 2-6 图

**2-6** 对于高压同轴传输线，为了在外导体尺寸固定不变（$R_2$ = 定值）与外施电压不变

($U_0$ 定值)的情况下,提高传输线的利用率,工程上有所谓同轴线最佳尺寸的选择问题。设如题 2-6 图所示,在 $R_2$ 与 $U_0$ 不变的条件下,求:

(1) 同轴线内哪里的电场强度最大?

(2) 定性描绘随着内导体半径 $R$ 的变化,最大电场强度 $E_m$ 变化曲线;

(3) 在介质 $\varepsilon$ 得到最充分利用的前提下,即力求降低介质内 $E_m$ 值的要求下,试求内导体半径的最佳尺寸应是外导体半径的多少倍?

**2-7** 一圆柱形的电容器中,同轴地置有两层绝缘体,已知内导线的直径为 2 cm,外导线的直径为 8 cm,内外两绝缘层的厚度分别为 1 cm 和 2 cm。内外两导线间的电压为 1 000 V。设有一层很薄的金属圆柱片放在两层绝缘介质之间,欲使每种介质中的最大场强相等,如以外导体为电位参考点,试问金属圆柱片的电位应为何值?

**2-8** 求下列情况下,真空中带电面间的电压:

(1) 相距为 $a$ 的两无限大平行板,面电荷密度分别为 $+\sigma_0$ 和 $-\sigma_0$;

(2) 无限长同轴圆柱面,半径分别为 $a$ 和 $b(b>a)$,每单位长度上的总电荷:内柱为 $\tau_0$,外柱为 $-\tau_0$;

(3) 半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 的两同心球面($R_2>R_1$),带有均匀分布的面电荷,其总量分别为 $q_0$(内球面)和 $-q_0$(外球面)。

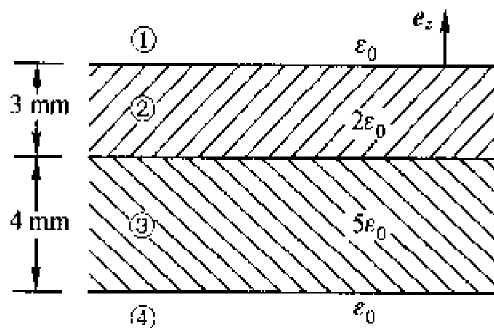
**2-9** 一圆柱形电容器,外导体的直径为 4 cm,内外导体间介质的击穿电场强度为 200 kV/cm,内导体的直径 $2\rho$ 可以自由选定,试问 $\rho$ 为何值时,该电容器能承受最大电压并求此最大电压值?

**2-10** 已知一真空电场中的电位函数为 $\varphi=2x^2y+20z-4\ln(x^2+y^2)$ V,求在 $P$ 点 (6 m, -2.5 m, 3 m)处的 $\varphi$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 及 $\rho$。

**2-11** 一平行板电容器,极板面积 $S=400\ \text{cm}^2$,两板相距 $d=0.5$ cm,两板中间的一半厚度为玻璃所占,另一半为空气。已知玻璃的 $\varepsilon_r=7$,其击穿强度为 60 kV/cm;空气的击穿场强为 30 kV/cm。试问当该电容器接到 10 kV 的电源时,会不会被击穿?

**2-12** 具有两层同轴介质的圆柱形电容器,内导体的直径为 2 cm,内层介质的相对介电常数 $\varepsilon_{r1}=3$,外层介质的相对介电常数 $\varepsilon_{r2}=2$,欲使两层介质中的最大场强相等,并且内外层介质所承受的电压相等,试问两层介质的厚度各为多少?

**2-13** 真空中置有两无限大介质层如题 2-13 图所示。设区域 1 中的电场强度 $\boldsymbol{E}_1=(10\boldsymbol{e}_x-20\boldsymbol{e}_y+30\boldsymbol{e}_z)$ V/m,分别求 1、2、3、4 四个区域中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 的夹角。



题 2-13 图

**2-14** 一长直接地金属槽的横截面如题 2-14 图所示,其侧壁与底面电位均为零,而顶盖电位 $\varphi_d=\varphi_m\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$。求槽内电位分布。

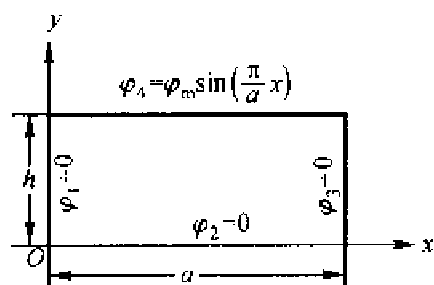
**2-15** 一板间距离为 $d=1$ cm 的平行板电容器,其中的介质(介电常数为 $\varepsilon_2=9\varepsilon_0$ 的玻璃)内存在圆柱形气泡,气泡直径为 $2r=1$ mm,

如题 2－15 图所示。已知玻璃和空气的击穿场强分别为 $15\times10^3$ kV/m 和 $3\times10^3$ kV/m。求该平行板电容器在下述情况下的最大工作电压：

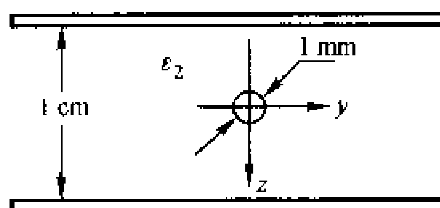
(1) 存在上述圆柱形气泡缺陷的情况；

(2) 无缺陷的情况。

(设在这两种情况下，相应的最大工作场强值取为击穿场强值的1/4)。



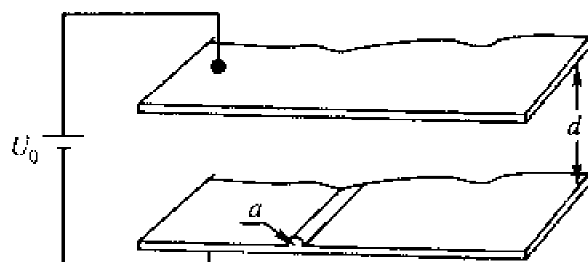

题 2－14 图



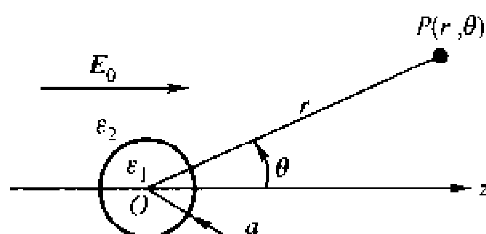

题 2－15 图

**2－16** 位于均匀电场($E_0$)中的导电圆柱体(其半径为 $a$)，带有电荷(其线密度为 $\tau$)时，若电位参考点取在导电圆柱体上，试证明空间任意点 $P(\rho,\phi)$ 的电位为 $\varphi_P=\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)E_0\rho\cos\phi-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$。

**2－17** 一平行板电容器由于加工粗糙在一极板表面残留一半径为 $a$ 的凸半圆棱，如题 2－17 图所示。试分析此加工缺陷对于电场分布的影响，在何处将出现最大电场强度，其值多大？




题 2－17 图




题 2－18 图

**2－18** 一介电常数为 $\varepsilon_1$ 的均匀介质球，处于均匀电场($E_0$)中，设球心即为所选定的球坐标原点，且 $E_0$ 的方向沿着 $z$ 轴(见题 2－18 图)。试证明 $\varphi=Ar\cos\theta+Br^{-2}\cos\theta$ 为本题电位函数一般解的表达式。

**2－19** 在分析上题的基础上，若设 $r=0$ 处，$\varphi=0$，求球内、外电场和场强。

**2－20** 在上题中，若介质球为一空气泡($\varepsilon_1=\varepsilon_0$)，处于变压器油($\varepsilon_2=2.2\varepsilon_0$)中，求最大电场强度较 $E_0$ 大多少？

**2－21** 空气中平行地放置两根长直导线，半径都是 6 cm，轴线间的距离为 20 cm。若导线间施加电压 1 000 V，求：

(1) 电场中的电位分布；

(2) 导线表面电荷密度的最大及最小值。

**2－22** 两根互相平行的同半径圆柱形导线组成架空输电线。已知导线半径 $a=$

0.3 cm，线间距 $d=40$ cm，线路长 $l=3$ km。求：

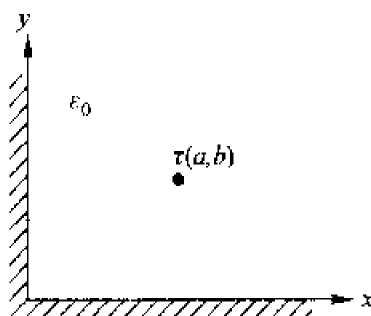
(1) 该输电线路的电容 $C$；

(2) 设线路架空高度为 $h=10$ m，这样，若计及大地影响，再求此时输电线路的总电容 $C'$。

**2-23** 一线密度为 $\tau$ 的线电荷，置于坐标为 $(a,b)$ 处并靠近成直角的接地导电平板，如题 2-23 图所示，求：

(1) 线电荷每单位长度所受之力；

(2) 在 $x=0, y=0$ 表面上，每单位长度的感应电荷。




题 2-23 图

**2-24** 在大地上方相距 $h$ 处，有一半径为 $a$ 水平放置的长直圆导线，其对地电位差为 $U_0$，求：

(1) 空气中任一场点处的电位 $\varphi_P$；

(2) 导线与大地间的电容量；

(3) 导线所受的电场力。

**2-25** 一对不同半径的分别带有线电荷密度为 $+\tau$、$-\tau$ 的无限长直传输线，如题 2-25 图所示。设线 A 半径 $a$ 远小于线 B 半径 $b$，因此可认为线 A 表面电荷的对外作用中心即位于其轴线 $O_1$ 处。求：

(1) 单位长度的线间电容 $C$；

(2) 系统中的电场强度的最大值 $E_{max}$ 及其所在点的位置。

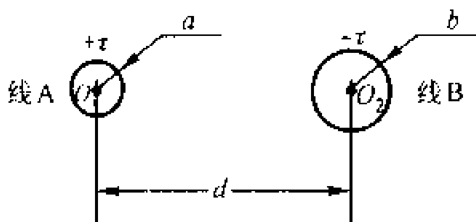
**2-26** 参阅题 2-26 图，求：

(1) 点电荷所受之力；

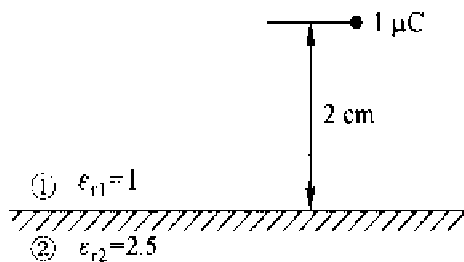
(2) 区域 2 中，镜像电荷所在处的电场强度及边界上的最大场强；

(3) 在点电荷与边界距离一半处的电位；

(4) 透入到区域 2 的 **D** 通量。




题 2-25 图




题 2-26 图

**2-27** 真空中一点电荷 $q=10^{-6}$ C，放在距金属球壳（半径为 5 cm）的球心 15 cm 处，求：

(1) 球面上各点的 $\varphi$、$\boldsymbol{E}$ 表达式。何处场强最大，数值如何？

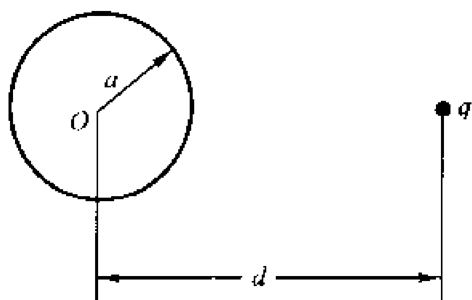
(2) 若将球壳接地，情况如何？

(3) 若将该点电荷置于球壳内距球心 3 cm 处，求球内的 $\varphi$ 和 $\boldsymbol{E}$。

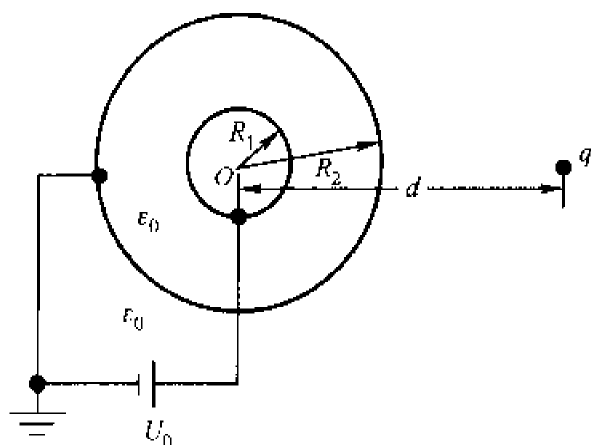
**2-28** 有一半径为 $a$ 的导体球，离球心 $d$ 处有一点电荷 $q$。试求：

(1) 该导体球的电位 $\varphi$；

(2) 点电荷 $q$ 所受的电场力 $\boldsymbol{F}_e$。



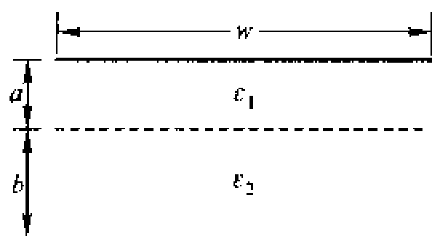

题 2－28 图



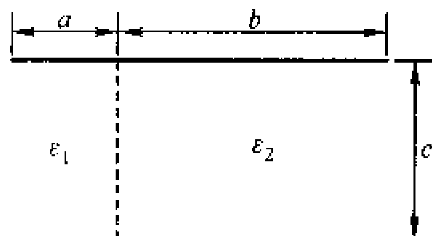

题 2－29 图

**2－29** 两同心球壳间的电压为 $U_0$，外球壳接地，且与球心 $O$ 相距 $d$ 处有一点电荷 $q$。求球内外各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位 $\varphi$。

**2－30** 分别求题 2－30 图(a)和(b)所示深度为 $d$ 的平行板电容器的电容。




(a)



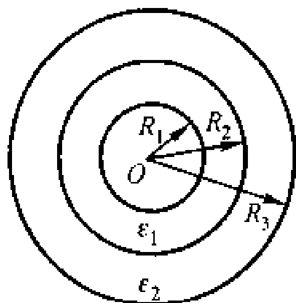

(b)

题 2－30 图

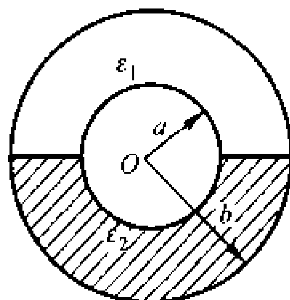
**2－31** 证明：相距为 $d$ 的两个半径分别为 $a$ 和 $b$ 的导体球之间的电容近似计算式($d\gg a$、$b$)为 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{d}}$。

**2－32** 一由两个半径分别为 $R_1$ 和 $R_3$ 同心导体球壳制成的电容器，如题 2－32 图所示。在球壳间以 $r=R_2$ 为界面，分别填有介质 $\varepsilon_1=\varepsilon_{r1}\varepsilon_0$ 和 $\varepsilon_2=\varepsilon_{r2}\varepsilon_0$。试求其电容量 $C$。

**2－33** 半径为 $a$ 和 $b$ 的两个同轴圆柱导体的电位分别为 $\varphi_a=0$，$\varphi_b=U_0$，导体间两种介质 $\varepsilon_1$ 与 $\varepsilon_2$ 的分界面与轴平面相重合，如题 2－33 图所示。求：




题 2－32 图




题 2－33 图

(1) 应用边值问题解算介质内的电位分布；

(2) 单位长度的电容 $C_l$。

**2-34** 若将某线长为 $l$ 的对称三芯电缆中三个导体相连，测得导体与铅皮间的电容为 0.051 μF，若将电缆中的两导体与铅皮相连，它们与另一导体间的电容为 0.037 μF，求：

(1) 电缆的各个部分电容；

(2) 每一相的工作电容；

(3) 若在导体 1、2 之间加直流电压 100 V，求导体每单位长度的电荷。

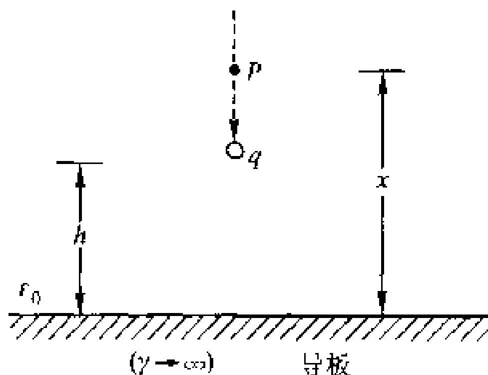
**2-35** 一同轴电缆，内外导体的直径分别为 10 mm 和 20 mm，其中介质的介电常数为 $5\varepsilon_0$，击穿场强为 200 kV/cm。试问此电缆每公里长度能储存的最大静电能量是多少？

**2-36** 设一点电荷如题 2-36 图所示由无限远处移动到导电平板上方 $h$ 处。求：

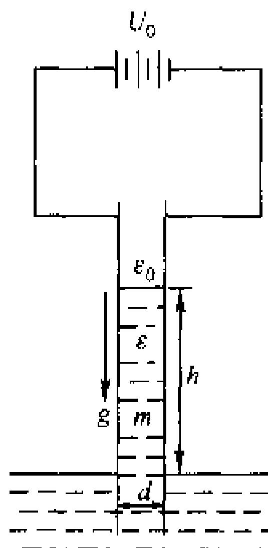
(1) 电场力对点电荷 $q$ 所作之功；

(2) 对应于最终位置(平板上方 $h$ 处)，点电荷 $q$ 所受到的电场力 **F**。

**2-37** 试求半径为 $a$，带电量为 $q$ 的带电肥皂泡的膨胀力。




题 2-36 图




题 2-38 图

**2-38** 板间距离为 $d$，电压为 $U_0$ 的两平行板电极，浸于介电常数为 $\varepsilon$ 的液态介质中。如题 2-38 图所示。已知介质液的质量密度是 $m$，试问两极板间的液体将升高多少？

# 第 3 章

# 静态电磁场Ⅱ：恒定电流的电场和磁场

本章承接第一、二章的阐述与分析，在演绎法的基础上，进一步运用类比法，以求纲举目张，融会贯通的学习效果。全章分别讨论了恒定电流的电场与磁场效应。

在 3.1—3.2 节中，基于恒定电场的基本规律性，由微分方程的相似性出发，总结了静电比拟方法，从而将恒定电场的分析统一在已有的静电场问题解答的基础上，由此简明地分析了接地电阻、跨步电压等相关的工程问题。

在 3.3—3.11 节中，首先，在总结恒定磁场基本规律性的基础上，研究恒定磁场中源－场关系。在分别对自由空间和磁媒质中的恒定磁场问题循序渐进地展开讨论之中，突出了对典型问题和与工程应用密切联系的磁场问题的分析，其中力求运用类比法，使之与读者已经掌握的静电场的分析方法、过程与结论相呼应，以进一步完善对静态电磁场应用原理和方法的系统阐述与构造。因此，环绕源－场关系展开的场分布研究（3.4、3.5 节）为阐述重点，进而讨论了工程所关注的电感参数、磁场能量和磁场力等问题，并给出了相应的计算方法与计算关系式。

## 3.1 恒定电场的基本方程与场的特性

在上一章中，讨论了对观察者没有相对运动的静止电荷的电场效应——静电场，这时，导体处于静电平衡状态，导体中 $\boldsymbol{E}=0$，为一等位体。

如果将导体与直流电源的正、负极板相连接，则因两电极间的电位差在导体中形成电场，该电场驱使导体中的自由电子在电场力作用下作持续的定向运动，即呈现直流（恒定电流），或者说，在导体中建立了电流场。此时，导体中 $\boldsymbol{E}\neq 0$，它也不再是等位体。显然，与恒定电流相伴随的电场必然是不随时间而变化的，故被称为恒定电场。但必须指出，这种恒定电场虽然与静电场一样，同属静态电场，但它存在于导体中，且其场源并非是静止电荷，而是处于动态平衡状态下的

驻定电荷*。

现以导电媒质中恒定电场的分析为主题，从基本方程及其定解条件出发，讨论其应用原理与方法，以及相关工程问题的研究。

### 3.1.1 恒定电场的基本方程·无散、无旋场

根据电荷守恒定律(1-72)可知，在导电媒质中流通稳定直流的前提是，电流场的任一闭合面内不可能有自由电荷增减的变化（即$\partial q/\partial t=0$）。换句话说，对于导电媒质中的恒定电场，由任意闭合面（净）流出的电流应为零。因此，此时电荷守恒定律归结为

$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (3-1)$$

上式即是恒定电场中的电流连续性方程。

另一方面，源于电源极板与导体表面上的驻定电荷，该导电媒质中恒定电场和静电场一样，满足环路定理

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad (3-2)$$

以上式(3-1)和式(3-2)便是导电媒质中恒定电场基本规律性的积分形式的数学描述。与此相对应的微分形式的基本方程，即为：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = 0 \qquad (3-3)$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (3-4)$$

与两场量($\boldsymbol{J}_c$、$\boldsymbol{E}$)相关联的媒质构成方程为

$$\boldsymbol{J}_c = \gamma \boldsymbol{E} \qquad (3-5)$$

由此可见，导电媒质中（电源区域外）恒定电流的电场具有无散（无源）、无旋场的基本特征。

基于无旋场，仿照静电场的处理，可引入标量电位函数$\varphi(\boldsymbol{r})$，作为辅助场量，即令$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$。同样，根据基本方程(3-3)和(3-4)，以及媒质构成方程(3-5)，对于均匀导电媒质，可导得电位$\varphi$所满足的基本方程为

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad (3-6)$$

**例3-1** 设一扇形导电片，如图3-1所示。给定两端面电位差为$U_0$，试求导电片内电流场分布及其两端面间的电阻。

---

* 形成导电媒质中恒定电流场的场源是位于外电源极板与导电媒质表面上呈恒定分布形态的自由电荷。这类电荷并非是静止电荷，它们是处在不断地交替与更换的运动态中保持分布特性不变的电荷，因此，被称作驻定电荷。

［解］ 根据本例边界几何形状的特征，显然，应采用圆柱坐标系。设待求场量为电位 $\varphi$，由于导电片中的电位仅与 $\phi$ 有关，因此，其数学模型可由边值问题描述为：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(\rho,\phi,z) = \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \\ \quad(\rho,\phi)\in D \\ \varphi|_{\phi=0} = 0 \\ \varphi|_{\phi=\theta} = U_0 \end{cases}$$

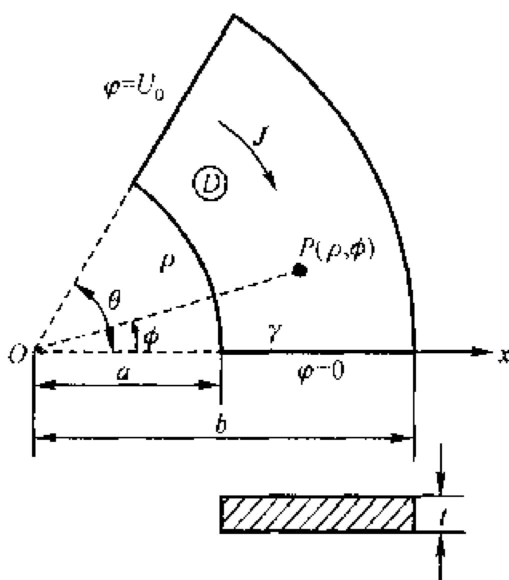


图 3－1 扇形导电片中的恒定电流场

由泛定方程积分之，得

$$\varphi = C_1\phi + C_2$$

将给定的边界条件代入，可求得：

$$C_1 = \frac{U_0}{\theta},\ C_2 = 0$$

故导电片内的电位为

$$\varphi = (U_0/\theta)\phi$$

电流密度分布为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \gamma\boldsymbol{E} = -\gamma\,\nabla\varphi = -\frac{\gamma}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{U_0\phi}{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\phi \\ &= -\frac{\gamma U_0}{\rho\theta}\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned}$$

因此，对于如图 3－1 所示厚度为 $t$ 的导电片两端面间的电阻，其值即为

$$\begin{aligned} R &= \frac{U_0}{I} = \frac{U_0}{\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}} = \frac{U_0}{-\int_a^b \frac{\gamma U_0}{\rho\theta}\boldsymbol{e}_\phi\cdot t\,d\rho(-\boldsymbol{e}_\phi)} \\ &= \frac{\theta}{\gamma t\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

## 3.1.2 电功率·电动势

在导电媒质内，自由电子的运动不可避免地产生与原子晶格间的碰撞，其结果把电子定向运动能传递给原子晶格，使它的热振动加剧，因而导电媒质的温度升高，此即电流的热效应。这种不可逆的能量转换，有赖于外电源不断地通过恒定电场，由电场力作功补偿电子所放出的部分运动能，以维持恒定的电流。

设在恒定电流场中，沿电流方向截取一段元电流管，如图3-2所示。该元

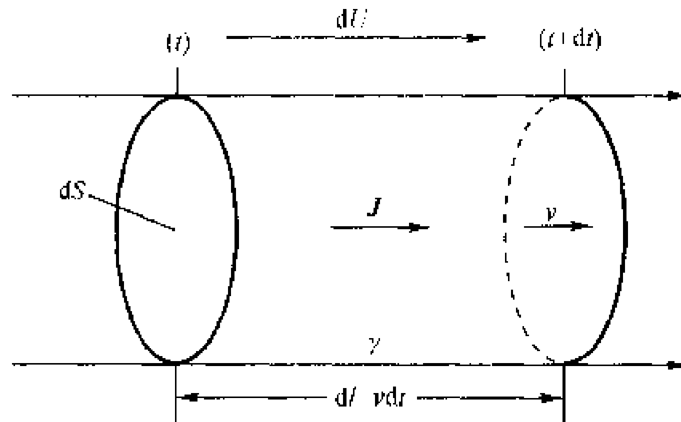



图3-2　损耗功率计算

电流管中的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 可认为是均匀的，其两端面分别为两个等位面。今若在电场力作用下，$dt$ 时间内有 $dq$ 电荷自元电流管的左端面移至右端面，则电场力作功为 $dW = dUdq$，于是外电源提供的功率 $dP = \dfrac{dW}{dt} = dUdI = (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l})(\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}) = EJdV$，故电功率体密度

$$p = \frac{dP}{dV} = EJ = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma} \qquad (单位;\mathrm{W/m^3}) \tag{3-7}$$

或写成一般形式

$$p = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \tag{3-8}$$

式(3-7)或(3-8)称为焦耳-楞次定律的微分形式。

由上所述，为维持导电媒质中的恒定电流，必须依靠外电源。电源是一种能将其他形式的能量（机械的、化学的或热的形式等）转换为电能的装置，就直流电源而言，如电池是通过与离子的溶解和沉积过程相联系的化学作用，使其内正负电荷分离，分别趋向正负电极以维持电极间恒定的电压，从而建立导电媒质中的恒定电场。将电源中能将正负电荷分离开来的非静电力 $\boldsymbol{F}_e$ 称为局外力，作用于单位正电荷上的局外力 $\boldsymbol{F}_e/q$ 设想为一等效场强，称为局外场强 $\boldsymbol{E}_e$，其方向由电源的负极指向正极。这样，从场的角度，可通过局外场强来描述电源的特性，而电源的电动势 $e$ 就可表示为

$$e = \int_{(电源内)} \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{l} \tag{3-9}$$

上式描述了电源电动势的定义，即把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，局外电场 $\boldsymbol{E}_e$ 所作的功。应该指出，当导电媒质中有局外场强 $\boldsymbol{E}_e$ 时，式(3-5)应改写为 $\boldsymbol{J} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e)$。

### 3.1.3 不同媒质分界面上的边界条件

(1) 两种不同导电媒质分界面上的边界条件

类同于静电场中2.4.3节的讨论，对应于积分形式下的散度方程(3-1)和旋度方程(3-2)，可分别导得在两种不同导电媒质分界面上场量应遵从的边界条件为：

$$J_{1n} = J_{2n} \tag{3-10}$$

和

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{3-11}$$

由此可知，若该两种导电媒质均为线性且各向同性，即 $\boldsymbol{J}_1 = \gamma_1 \boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{J}_2 = \gamma_2 \boldsymbol{E}_2$，则类比于静电场的折射定律(2-57)，现电流场中的折射定律亦可表示为

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{3-12}$$

(2) 良导体与不良导体分界面上的边界条件

在工程应用场合中，常会遇到电流从金属体流向周围不良导电媒质的情况。例如，各类电气设备的接地系统；同轴电缆中因绝缘层不完善引发的泄漏电流等均属这类工况。此时，如图3-3所示，在 $\gamma_1 \gg \gamma_2$ 条件下，只要 $\alpha_1 \neq 90°$，根据折射定律[式(3-12)]可知，$\alpha_2 \approx 0$。这表明，当电流由良导体侧流向不良导体一侧时，电流线总是垂直于界面流入不良导体($\alpha_2 \approx 0$)。换句话说，这时可以不计良导体内部的电压降，而把良导体表面可近似看作为等位面。

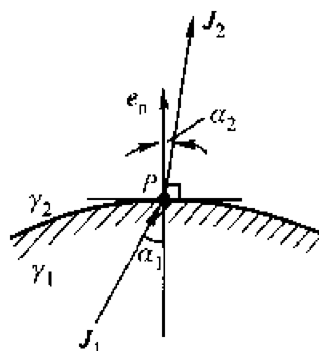


图3-3 由良导体($\gamma_1$)到不良导体($\gamma_2$)的电流流向

以钢制成的接地器系统为例，钢的电导率 $\gamma_1 = 5 \times 10^6$ S/m，而周围土壤的电导率与土壤的湿度、成分有关，如按惯常的平均意义取值为 $\gamma_2 = 10^{-2}$ S/m，则即使令 $\alpha_1 = 89°59'50''$，由式(3-12)可知，$\alpha_2 \approx 8'' \approx 0$。因此，如3.2.2节中接地器表面可近似看作为等位面，即电流线将垂直于接地器表面，从接地器内流入周围的土壤。

(3) 导体与理想介质($\gamma_2 = 0$)分界面上的边界条件

以直流输电线为例，图3-4描述了所论分界面上驻定电荷的分布及在理想介质空间中 $\boldsymbol{E}$ 线分布的特征示意图。此时，由于 $J_{c2n} = 0$，必然有 $J_{c1n} = 0$；且 $E_{1t} = E_{2t}$，电场强度的切向分量连续。应指出的是，虽然 $E_{1n} = \dfrac{J_{c1n}}{\gamma_1} = 0$，但 $E_{2n} \neq 0$，其结果使紧挨

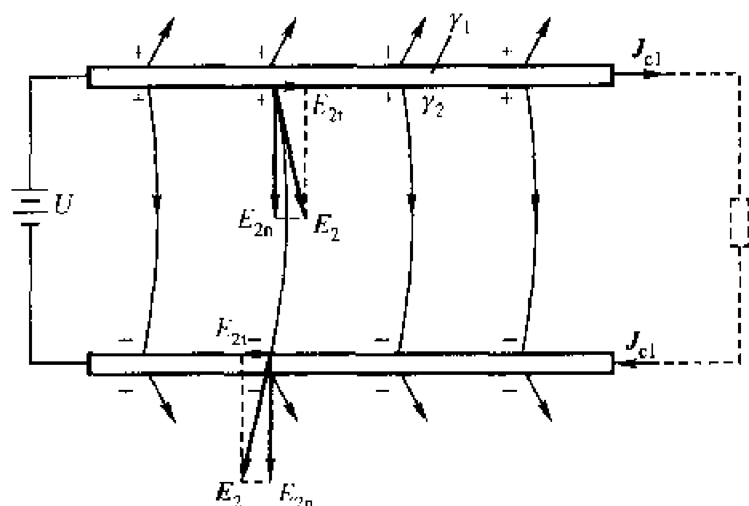



图 3-4　输电线电场示意图

导体表面处理想介质中的电场强度 $E_2$ 与导体表面不相垂直,如图 3-4 所示。

现进一步考察输电线导线表面处空气介质内 $E_2$ 的切向与法向分量之间的量值关系。设输电线(铜制,$\gamma_1 = 58\times10^6$ S/m)中的电流密度为 $J_{c1} = 5$ A/mm$^2$,则 $E_{2t} = E_{1t} = J_{c1}/\gamma_1 = 0.086$ V/m。且设该输电线在工作电压下其表面的 $E_{2n}$ 接近于空气的击穿场强值,即 $E_{2n}\approx3\times10^6$ V/m。显然,该输电线系统 $E_{2n}/E_{2t} = 3.5\times10^7$,由此足以表明,分量 $E_{2t}$与 $E_{2n}$相比是极其微小的,因而在研究输电线附近的电场时,可以略去 $E_{2t}$分量的影响,这就导致导线表面的边界条件可等同于静电场中导体的边界条件。也就是说,对于载有恒定电流导体周围电介质中电场的分析,完全可以应用相应的静电场问题的解答。

(4) 两种有损电介质分界面上的边界条件

如图 3-5 所示,在两种有损电介质的分界面上,基于式(3-10),应有

$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n} \qquad (3-13)$$

同时,基于极化效应,应有

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma \qquad (3-14)$$

联立求解式(3-13)和(3-14),即得分界面上的自由电荷面密度为

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} J_{2n} \qquad (3-15)$$

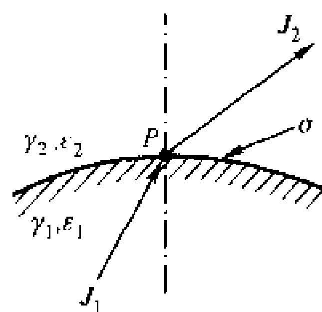



图 3-5　两种有损电介质的分界面

由此可见,只有当该两种媒质参数满足 $\varepsilon_2\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma_2$ 条件时,$\sigma = 0$;否则,分界面上必存在有面分布形态的自由电荷。关于这一自由电荷积累过程的机理分析将在 4.2 节中详述,它是形成恒定电流场的过渡过程中的生成物。

在高压大容量的电气设备(如电容器、电缆等)中,由于绝缘介质的不完善

性，往往在不同介质的分界面处积累有上述的自由电荷面密度分布。因此，当切断电源，实施带电端工作接地时，应注意该自由电荷层的消失需要一定的时间；否则，短暂放电将不足以消除全部的残留电荷。

**例 3-2** 设一平板电容器由两层非理想介质串联构成，如图 3-6 所示。其介电常数和电导率分别为 $\varepsilon_1$、$\gamma_1$ 和 $\varepsilon_2$、$\gamma_2$，厚度分别为 $d_1$ 和 $d_2$。在外施恒定电压 $U_0$ 并忽略边缘效应条件下，试求：(1)两层非理想介质中的电场强度；(2)单位体积中的电场能量及功率损耗；(3)两层介质分界面上的自由电荷面密度。

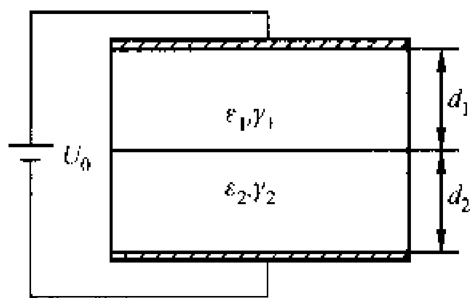



图 3-6 非理想介质的平板电容器中的恒定电流场

[**解**] (1)在忽略边缘效应的假设下可以认为，该电容器中的电流线与两介质交界面相垂直，因而根据式(3-10)可得

$$\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$$

又因有

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0$$

联立求解以上两式，得：

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}, \quad E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}$$

(2) 两非理想介质中的电场能量密度分别为：

$$w_{e1} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 E_1^2, \quad w_{e2} = \frac{1}{2}\varepsilon_2 E_2^2$$

由式(3-7)可知，相应的单位体积中的功率损耗分别为：

$$p_1 = \gamma_1 E_1^2, \quad p_2 = \gamma_2 E_2^2$$

(3) 根据式(3-15)，分界面上自由电荷面密度为

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} J_2 = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} U_0$$

## 3.2 恒定电场与静电场的比拟·接地系统

### 3.2.1 静电比拟

将均匀导电媒质中的恒定电场(电源外)与无源区($\rho = 0$)中均匀介质内的静电场相比较，可以看出，两者有对应的类似关系，如表 3-1 所示。

**表 3－1　相似的微分方程与关系式**

| 均匀导电媒质中的恒定电场(电源外) | 均匀介质中的静电场($\rho=0$ 处) |
|---|---|
| $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_c=0$ | $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$ |
| $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$　(或 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$) | $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$　(或 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$) |
| $\boldsymbol{J}_c=\gamma\boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ |
| $\nabla^2\varphi=0$ | $\nabla^2\varphi=0$ |
| $I=\int_S\boldsymbol{J}_c\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ | $q=\psi_D=\int_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ |

从场的唯一性定理出发，基于表 3－1 所列微分方程 $\nabla^2\varphi=0$ 的相似性，显然，只要两者对应的边界条件相同，则恒定电流场中电位 $\varphi$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}_c$ 的分布将分别与静电场中的电位 $\varphi$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的分布相一致。

如果两种场中媒质分片均匀，例如各由两种媒质组成，此时，当两者边界条件相似，且两者对应的电导率与介电常数之间满足如下物理参数相似的条件时：

$$\gamma_1/\gamma_2=\varepsilon_1/\varepsilon_2 \tag{3-16}$$

则两种场在分界面上的 $\boldsymbol{J}_c$ 线与对应的 $\boldsymbol{D}$ 线折射情况相同，即两种场的相似关系依然成立。

根据以上相似原理，就可以把一种场的计算和实验结果，推广应用于另一种场，这种方法，通常称为静电比拟。例如，可以利用已知的静电场的计算结果，直接推求相应的恒定电场的解答；又如，由于电流场中的电流、电位分布容易测定，故又可利用相应的电流场模型来实测待求的静电场问题的解答，即所谓电流场的模拟(关于各种电流场模拟的方法，可参阅参考书目[14])。

在静电比拟的基础上，可以推论，由两者场分布决定的相应电参数间也必然存在相似关系为

$$G/C=\gamma/\varepsilon \tag{3-17}$$

式中 $G$ 为恒定电场问题中的电导(电导 $G$ 的定义是流经导体的电流与导体两端电压之比值，即 $G=I/U$)；$C$ 为对应的静电场问题中的电容。式(3－17)的正确性，可由满足静电比拟条件的以下两式的类比得知，即

$$G=\frac{I}{U}=\frac{\int_S\boldsymbol{J}_c\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}=\frac{\gamma\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}} \tag{3-18}$$

和

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} = \frac{\varepsilon \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} \tag{3-19}$$

这样，不仅可以基于恒定电场分布的解答，按式(3-18)计算得出相应导体的电导参数，而且如果已知对应电极系统的电容，则由相似关系式(3-17)，即可求得相应的电导。

**例 3-3** 一内、外导体半径分别为 $a$ 和 $b$ 的同轴电缆，导体间外施电压 $U_0$（图 3-7），试求其因绝缘介质不完善而引起的电缆内的泄漏电流密度及其绝缘电阻。

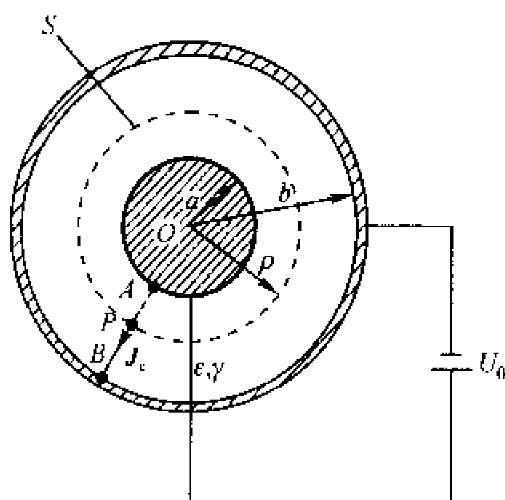



图 3-7 同轴电缆中的泄漏电流

**[解]** 设电缆的长度 $L$ 远大于截面半径，故其中间区段恒定电流场分布可看作平行平面场问题。

(1) 解法一：基于场分布的分析。

根据场分布的圆柱对称特征，绝缘介质内的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和泄漏电流密度 $\boldsymbol{J}_c$ 均取辐射方向。在绝缘介质内作一半径为 $\rho$ 的同轴圆柱面 $S$，设其长度为 $l$，且令泄漏电流为 $I$，则该圆柱面上任意点 $P$ 处的泄漏电流密度为 $J_c = \frac{I}{2\pi\rho l}$，电场强度为 $E = J_c/\gamma = \frac{I}{2\pi\rho l\gamma}$。

沿半径取电场强度的线积分，即得内外导体间电压

$$U_{AB} = U_0 = \int_a^b E \mathrm{d}\rho = \frac{I}{2\pi l\gamma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

由此可知泄漏电流密度

$$\boldsymbol{J}_c = \frac{\gamma U_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)}\boldsymbol{e}_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

从而得绝缘电阻（又称漏电阻）

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{2\pi l\gamma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(2) 解法二：基于静电比拟的分析

由类比关系，参照对应的例 2-9 静电场问题的解答，可得本例电场强度为

$$E = \frac{U_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

故泄漏电流密度

$$J_c = \gamma E = \frac{\gamma U_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

同理,按类比关系[式(3－17)],本例的漏电导 $G = \frac{\gamma}{\varepsilon} C$,而在例 2－9 中可知,单位长度的电容 $C_l = \frac{\tau}{U_0} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$。因而代入即得绝缘电阻(漏电阻)为

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \cdot \frac{1}{C_l l} = \frac{1}{2\pi l \gamma} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

### 3.2.2 接 地 电 阻

电系统的接地技术是涉及面相当广泛的工程措施,它既是保障人身和设备安全运行,又是为电系统正常工作提供零电位基准参考点的必不可少的技术措施。这里,以电力系统为应用背景,阐明接地系统的工作原理。

在工程上,为了接地将金属导体埋入地内,而将系统中需要接地的部分与该导体相连接,这种埋在地内的导体系统称为接地器。如图 3－8 所示,馈电给输

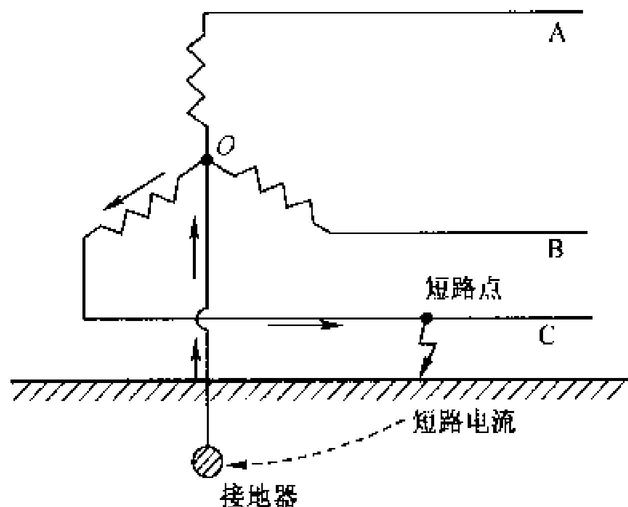



图 3－8 三相供电系统

电线的星形联接的三相高压变压器,通常其中性点直接接地,或通过某一电阻接地。这种被称为工作接地的技术措施,使输电线的对地电压在正常运行状态下将始终稳定在相电压。可以看出,若有一相导线的绝缘损坏,则发生短路故障。

这时，短路电流从绝缘损坏处通过大地和接地器而流至变压器的中性点。电流在流经大地时遇到的电阻，统称为接地电阻。它包括接地器本身的电阻、接地导线的电阻、接地器和大地之间的接触电阻，以及两接地器之间土壤的电阻。其中前三部分电阻比最后部分的电阻要小得多，因此，这里讨论的接地电阻指的是大地电阻。

严格说来，短路电流将在看作导电媒质的大地中产生感应电动势，属第四章准静态场研究的问题。但是，由于大地的电阻率相当大，所以在计算接地器附近的电流时，与有功电压降相比，可将感应电动势的影响略去不计，而视为恒定电流场问题。

关于接地电阻 $R$ 的计算，由 3.1.3 节讨论可知，位于土壤中的接地器可被看作为一等位体。因此，它满足与静电场中对应系统间的静电比拟关系，即由对应静电系统的电容 $C$ 按式(3－17)便可算得相应接地器的接地电导 $G=1/R=(\gamma/\varepsilon)C$。

对于深埋于地中，半径为 $a$ 的球形接地器(图 3－9)，因其埋入地下足够的深度，又因在球形电极周围流散的电流密度最大，即地内电阻主要集中于电极附近，因此一般可忽略不计地面影响。这样，由对应的半径为 $a$ 的孤立导体球的电容 $C=4\pi\varepsilon a$［式(2－114)］，即知该系统的接地电导应等于

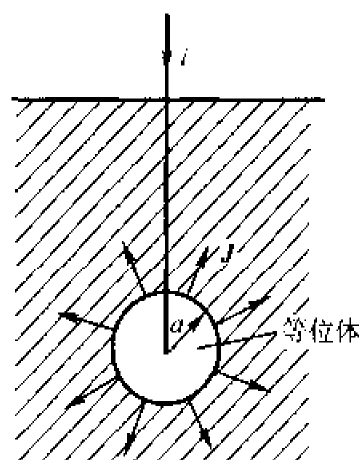
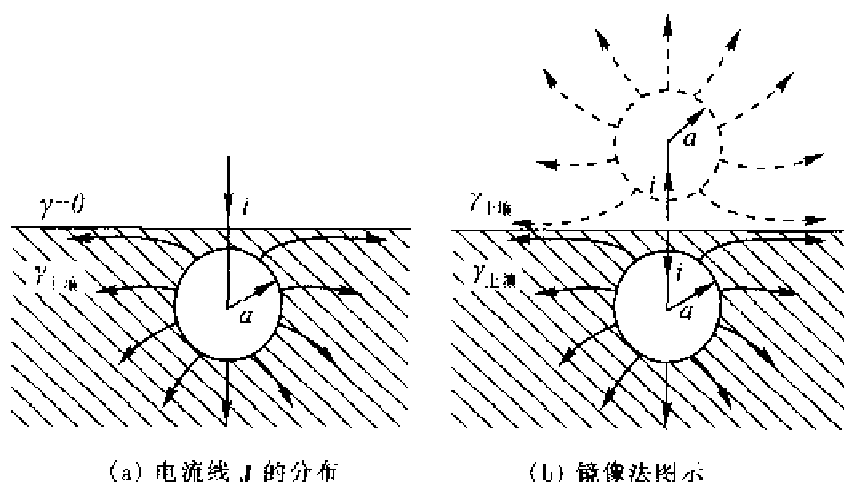



图 3－9　深埋的球形接地器

$$G=\frac{1}{R}=4\pi\gamma a \qquad (3-20)$$

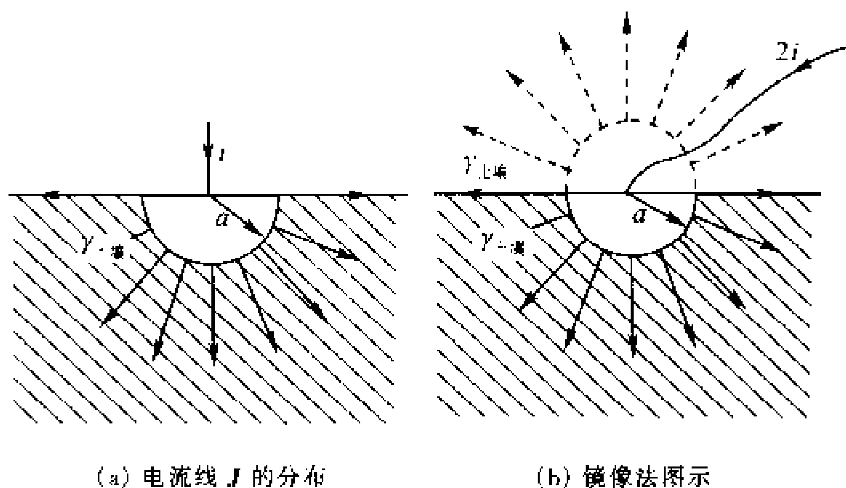
如果接地器埋入地面不深，则必须考虑地面对地中电流分布的影响，如图 3－10(a)所示，此时，可应用镜像法求解，即按图 3－10(b)进行计算。应注




(a) 电流线 J 的分布　　(b) 镜像法图示

图 3－10　球形接地器

意，流入虚构的上方电极的电流应等同于流入实际电极的地中电流，以满足原系统地面处边界条件不变，即$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0$。显然，待求的接地电阻应等于实际电极与其镜像所构成系统的接地电阻的两倍。这一结论同样可由埋于地面的半球形接地器[图3-11(a)]分析中得出。按图3-11(b)镜像法处理所得的恒定电流场问题，由对应的均匀介质内孤立导体球的静电比拟关系，即得待求的接地电导$G=\frac{4\pi\gamma a}{2}=2\pi\gamma a$，相应的接地电阻$R=\frac{1}{2\pi\gamma a}$。




(a) 电流线 $J$ 的分布　　　(b) 镜像法图示

图3-11　半球形接地器

### 3.2.3　跨步电压

在电力系统的接地体附近，或在输电线断线故障接地点附近，一旦有地中电流通过时，由于接地电阻的存在，在地面上将形成异常的电位分布。这时，若人进入该区域，就可能遭遇两足间电压(跨步电压)超过所允许的数值范围，达到危及生命的境地，即存在危险区标识的需求。

现典型化上述工程分析的背景，讨论如图3-12所示的半球形接地器在地面上形成的电流场分布，并确定危险区的半径。

设注入接地器的电流为$I$，并令接地器位于坐标原点。参照图3-11(b)，应用镜像法并由静电比拟关系可知，该半球形接地器生成的电流场场强$\boldsymbol{E}=\frac{I}{2\pi\gamma r^2}\boldsymbol{e}_r$，因此，场中任意点$P$的电位为

$$\varphi(r)=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{\infty}\frac{I}{2\pi\gamma r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{I}{2\pi\gamma r}$$

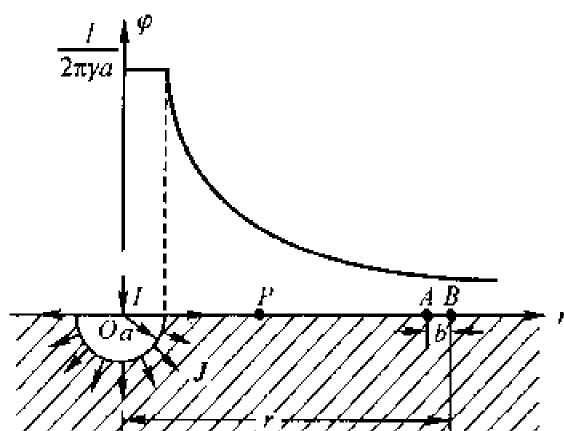



图 3－12　跨步电压与危险区的分析

沿地面 $\varphi-r$ 变化关系曲线绘于图 3－12 中。若人的一跨步距离 $AB=b$，则在有地中电流的地面上，跨步电压值为

$$U_{AB}=\int_{A}^{B}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{r-b}^{r}\frac{I}{2\pi\gamma r}\mathrm{d}r=\frac{I}{2\pi r}\left(\frac{1}{r-b}-\frac{1}{r}\right)\approx\frac{Ib}{2\pi\gamma r^2} \qquad (3-21)$$

对人身安全来说，规定 $U_{AB}<U_0=50\sim70$ V。但应指出，实际危及生命安全的是电流值（当通过人体的工频电流 $I>8$ mA 时，即有可能发生危险）。

今以 $U_0$ 为评定人身安全的临界电压，根据式（3－21），即可得知确定危险区半径 $r_0$ 的关系式为 $U_0=\dfrac{Ib}{2\pi\gamma r_0^2}$，从而以接地器为中心的危险区半径为

$$r_0=\sqrt{\frac{Ib}{2\pi\gamma U_0}} \qquad (3-22)$$

已知半球形接地器的接地电阻 $R=\dfrac{1}{2\pi\gamma a}$，代入上式即得

$$r_0=\sqrt{\frac{abIR}{U_0}} \qquad (3-23)$$

这表明，工程上为减小 $r_0$，以力求缩小危险区面积，应通过改变接地器结构，修正电位的变化率，即减小接地器的接地电阻值，或减小短路电流等方面，采取相应的工程对策。

## 3.3　恒定磁场的基本方程与场的特性

在 3.1、3.2 两节中已集中讨论了恒定电流所伴随的恒定电场效应，现进一步分析恒定电流所伴随的恒定磁场效应。

### 3.3.1 恒定磁场的基本方程

基于 2.1 节的讨论，描述出恒定电流产生的恒定磁场基本规律性的数学模型，应归结为：

积分形式：

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3-24a}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3-24b}$$

微分形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_c \tag{3-25a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3-25b}$$

其媒质的构成方程为

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{3-26}$$

对于理想化的真空状态，此时式(3-26)中的磁导率 $\mu = \mu_0$。

根据亥姆霍兹定理，由基本方程(3-25a)和(3-25b)可见，恒定磁场具有有旋、无散(无源)场的基本特性。显然，比照静电场为无旋、有散(有源)场的基本特性，二者的基本规律性是截然不同的。但往后分析可见，恒定磁场与静电场问题的研究方法与所得结果，有许多相似之处，因此，可应用类比方法，有助于学习和理解。

### 3.3.2 真空中的安培环路定律·恒定磁场的有旋性

对于自由空间中的恒定磁场问题，根据所定义的磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，场量 $\boldsymbol{B}$ 与源量 $\boldsymbol{J}$ 之间的关系，可由基本方程(3-24a)和(3-25a)得出为

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \tag{3-27}$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_c \tag{3-28}$$

式(3-27)称为真空中的安培环路定律。该定律表明，真空中恒定磁场的磁感应强度沿任一闭合曲线 $l$ 的环量，等于真空的磁导率乘以该曲线所限定面积 $S$ 上穿过的电流的代数和。式中电流 $I_k$ 正负，取决于电流方向与积分回路绕行方向是否符合右手定则。当方向相符时为正；反之取负值。例如，对图 3-13，显然应有 $\oint_l \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0(I_1 + I_2 - I_3)$。此外，应指出，式中的 $\boldsymbol{B}$ 是场中所有励磁场源共同产生的效应，但 $\boldsymbol{B}$ 的环量却仅与闭合曲线所包围的场源相关，如图 3-13

中的励磁电流 $I_4$，它是建立磁场的励磁场源的组成部分，然而，对环量 $\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 则并无贡献。由于安培环路定律作为恒定磁场基本规律性的一个方面的描述，建立了场量与源量间的关系，因此，如同 3.4 节的讨论，式(3－27)也是应用于恒定磁场典型问题分析计算的一种基本方法。

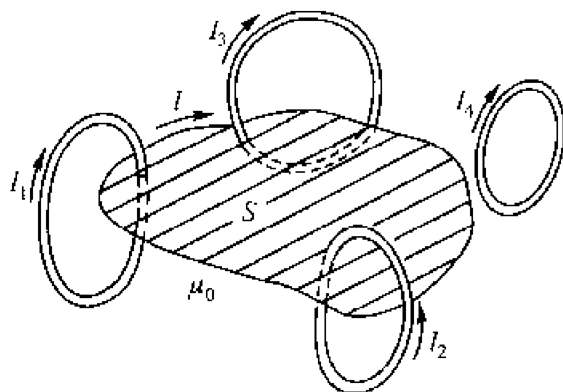



图 3－13　环量 $\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与励磁电流 $I$ 间关系说明图

式(3－27)是真空中安培环路定律的积分形式，与其相对应的微分形式的表述，即为式(3－28)。该式表明，源于电流的磁场具有旋涡场的特性，其磁感应强度的旋度等于真空的磁导率乘以该点的电流密度。由此可见，磁场的有旋性，表明了磁场线与其“旋涡源”(电流线)之间相互交链的基本特征。

### 3.3.3　磁通连续性原理·恒定磁场的无散性

基本方程(3－24b)表明，真空中通过任一闭合曲面 $S$ 的磁感应强度通量(磁通量)恒为零，即磁场线是无头、无尾，处处闭合的通量线，这一特性称为磁通连续性原理。与该积分形式的基本方程相对应的微分形式的描述，即基本方程(3－25b)，表明恒定磁场的磁感应强度的散度处处为零，具有无散(无源)场的基本特征。

基于恒定磁场基本规律性的以上又一侧面的描述，可以否定孤立磁荷的存在，再次论证磁场线总是自身闭合，且与电流线相互交链的基本特征。

### 3.3.4　毕奥－萨伐尔定律

当自由空间中恒定磁场的散度和旋度分别由基本方程(3－25b)和(3－28)确定后，即 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_c$，则根据亥姆霍兹定理，按式(1－49)，磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 应为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3－29}$$

同样,按式(1－50)和(1－51)可知,上式中:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

和

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

如前所述,式中 $\boldsymbol{r}$ 为场点坐标;$\boldsymbol{r}'$ 为源点坐标。将已确定的散度和旋度分别代入 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的表达式,即得:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3-30}$$

和

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{3-31}$$

于是,由式(3－29)可知,磁感应强度

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3-32}$$

此结果表明,对于自由空间中的恒定磁场,任意点的磁感应强度等于该点矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的旋度,该矢量函数称为矢量磁位。矢量磁位的 SI 单位是韦伯/米(Wb/m)。由 1.3.3 节已知,一个无散矢量场总可以表示为另一个矢量场的旋度。由于恒定磁场是无散场,因此由亥姆霍兹定理推得式(3－32)的成立,再次证实了前述的这一结论。

由此可见,若已知电流分布 $\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r})$,根据式(3－31)可以求出空间任一点的矢量磁位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,然后,再由式(3－32)所示的微分运算便可计算该点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$。现若将式(3－31)直接代入式(3－32)中,可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla \times \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{3-33}$$

式中[附录二中式(5)]

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) \times \boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}') + \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right)\nabla \times \boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')$$

由于 $\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')$ 为 $\boldsymbol{r}'$ 的函数,而算子 $\nabla$ 仅作用于场点坐标 $\boldsymbol{r}$,因此 $\nabla \times \boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}') = 0$,又由式(2－17)已知

$$\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_R}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}$$

将以上结果代入式(3－33),得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{e}_R}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}\mathrm{d}V' \tag{3-34}$$

上式就是静磁场的基本定律——毕奥－萨伐尔定律。根据此定律,即可在已知源量(电流)分布情况下,计算空间任一点场量(磁感应强度)的分布。

鉴于导体中电流分布的不同形态，当按体密度 $\rho$ 分布的电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 匀速流经导体时，形成体电流密度矢量 $\boldsymbol{J}_c=\rho\boldsymbol{v}$（单位：A/m²）；对应于按面密度 $\sigma$ 分布的运动电荷，形成面电流密度矢量 $\boldsymbol{K}=\sigma\boldsymbol{v}$（单位：A/m）；但对应于线密度 $\tau$ 分布的运动电荷所形成的线电流，无密度分布可言，而以线电流 $I=\tau v$（单位：A）表示之。因此，就元电流概念来说，基于元电荷 $\mathrm{d}q$ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 的定向运动，可以得知

$$\mathrm{d}q\boldsymbol{v}=\boldsymbol{J}_c\mathrm{d}V=\boldsymbol{K}\mathrm{d}S=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad(\text{单位：A}\cdot\text{m})\tag{3-35}$$

这样，由式(3－34)可推出给定面、线电流分布情况下的磁感应强度的计算式分别为：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_R}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\mathrm{d}S'\tag{3-36}$$

和

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{e}_R}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\tag{3-37}$$

## 3.4 自由空间中的磁场

对于自由空间中的恒定磁场问题，分析研究的首要任务是在给定源量的作用下求其基本场量——磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$的空间分布，也就是通常所称的场分布问题。本节将在上节所述恒定磁场基本方程的基础上，具体讨论自由空间中已知源量 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$分布，求解场量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$空间分布的分析计算方法，并给出相应的计算关系式。同时，由于恒定磁场的无散性，得以引入矢量磁位函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，本节将深入阐述作为计算辅助量的矢量磁位函数在简化场分布研究中的应用价值。此外，在无源量分布的恒定磁场区域中，还引入另一位函数——标量磁位 $\varphi_m$。同样，作为计算辅助量，标量磁位在简化场分布研究中，也有其应用价值。

### 3.4.1 场分布：基于场量 B 的分析

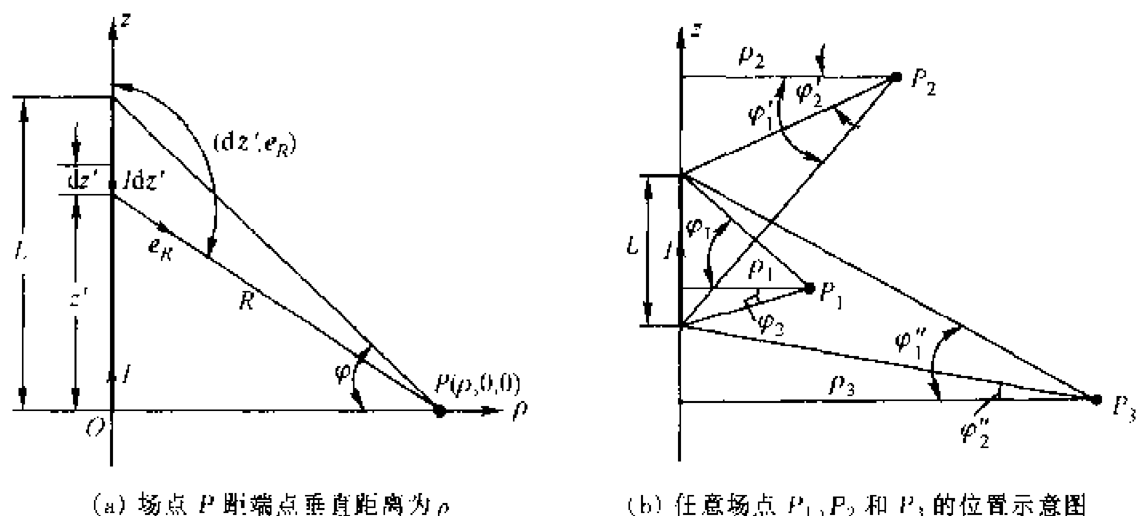
在无界的自由空间中，对应于不同分布形态的源量（线、面和体电流），直接计算场中磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 的基本关系式已由毕奥－萨伐尔定律[式(3－34)、(3－36)和(3－37)]给出。应该注意，这些直接积分的计算公式均为矢量积分关系式，因此，分析的基本思路同于静电场，即首先离散化整体电流分布为典型的元电流分布的组合，求出相应于元电流的场中元磁感应强度的解答；然后，应用叠加原理，合成所有元电流的贡献，即得待求的 $\boldsymbol{B}$ 场分布。

对于一些具有对称性场分布特性的磁场问题，若能找到一条闭合曲线 $l$，在该曲线上，各点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的数值相等，且 $\boldsymbol{B}$ 的方向与积分元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向间有

不变的夹角关系，则真空中的安培环路定律[式(3-27)]也是应用于场分布分析计算的有效方法。

**例 3-4** 计算真空中载流 $I$ 的有限长直导线所引起的磁感应强度。

**[解]** 首先，分析计算图 3-14(a)所示典型场点 $P$ 处的磁感应强度的解答；然后，推广至图 3-14(b)所示任意场点 $P_1$、$P_2$ 和 $P_3$ 处磁感应强度解答的分析。




(a) 场点 $P$ 距端点垂直距离为 $\rho$　　(b) 任意场点 $P_1$、$P_2$ 和 $P_3$ 的位置示意图

图 3-14 有限长直线电流 $I$ 的磁场

(1) 典型场点 $P$ 处的磁感应强度

根据场的旋转对称性，采用圆柱坐标系，令 $z$ 轴与线电流 $I$ 相重，原点置于该线电流的一端，于是子午面($\rho Oz$)内 $\rho$ 轴上的任一点即为本例所设定的典型场点 P。不失讨论的一般性，该典型场点坐标记为($\rho$,0,0)。按前已概括的解题基本思路，“先分后合”，取元电流 $I\mathrm{d}z'$，它在点 $P$ 处产生的元磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$，由式(3-37)可知为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}'\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}z'\sin(\mathrm{d}\boldsymbol{z}',\boldsymbol{e}_R)}{\rho^2+z'^2}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\rho\mathrm{d}z'}{(\rho^2+z'^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\phi$$

从而

$$\boldsymbol{B}=\int_L\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I\rho}{4\pi}\int_0^L\frac{\mathrm{d}z'}{(\rho^2+z'^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{z'}{\rho\sqrt{\rho^2+z'^2}}\bigg|_0^L\boldsymbol{e}_\phi$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{L}{\rho\sqrt{\rho^2+L^2}}\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\sin\varphi$$

(2) 任意场点 $P_1$、$P_2$ 和 $P_3$ 处的磁感应强度

基于典型场点 $P$ 处磁感应强度的解答，不难理解图 3-14(b)中任意场点

$P_1$、$P_2$ 和 $P_3$ 处的磁感应强度应分别为：

$$\boldsymbol{B}_{P_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_1}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_2}(\sin\varphi_1' - \sin\varphi_2')\boldsymbol{e}_\phi$$

和

$$\boldsymbol{B}_{P_3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_3}(\sin\varphi_1'' - \sin\varphi_2'')\boldsymbol{e}_\phi$$

(3) 推论：若 $L\to\infty$，即所论为无限长直载流导线的磁场时，则在距离导线 $\rho$ 处场点上的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

**例 3-5** 计算真空中载有恒定面电流密度 $\boldsymbol{K}_0$ 的无限大导电片所引起的磁感应强度。

**[解]**

(1) 解法一：应用毕奥-萨伐尔定律求解

如图 3-15(a)所示，采用直角坐标系，令该无限大载流片位于 $y=0$ 的平面上，且面电流密度 $\boldsymbol{K}_0$ 与 $z$ 轴方向一致，即有 $\boldsymbol{K}_0 = K_0\boldsymbol{e}_z$。同样，首先，离散化整体面电流分布为无限多宽度为 $\mathrm{d}x'$ 的元电流片的集合。这样，各元电流片均可看作是一无限长的线电流($\mathrm{d}I = K_0\mathrm{d}x'$)。显然，以图 3-15(a)中与 $y$ 轴相距 $x'$ 处的元电流片 $\mathrm{d}I_1$ 为例，由例 3-4 知其在点 $P$ 处产生的元磁感应强度应为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0(K_0\mathrm{d}x')}{2\pi(x'^2 + y^2)^{1/2}}\boldsymbol{e}_\phi$$

根据附录一中坐标系单位矢量间的转换关系式，可知

$$\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x\sin\phi + \boldsymbol{e}_y\cos\phi = -\boldsymbol{e}_x\sin\alpha + \boldsymbol{e}_y\cos\alpha$$

同时，对于场点 $P$，注意到源量分布的对称性，即若在 $z$ 轴两侧对称地截取元电流片，如图 3-15(a)所示，则元电流片 $\mathrm{d}I_1$ 和 $\mathrm{d}I_2$ 为对称组合，它们在点 $P$ 处引起的元磁感应强度的 $y$ 方向分量将相消，而 $x$ 方向分量则相助。因此，整体面电流分布所产生的合成磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{e}_x$$

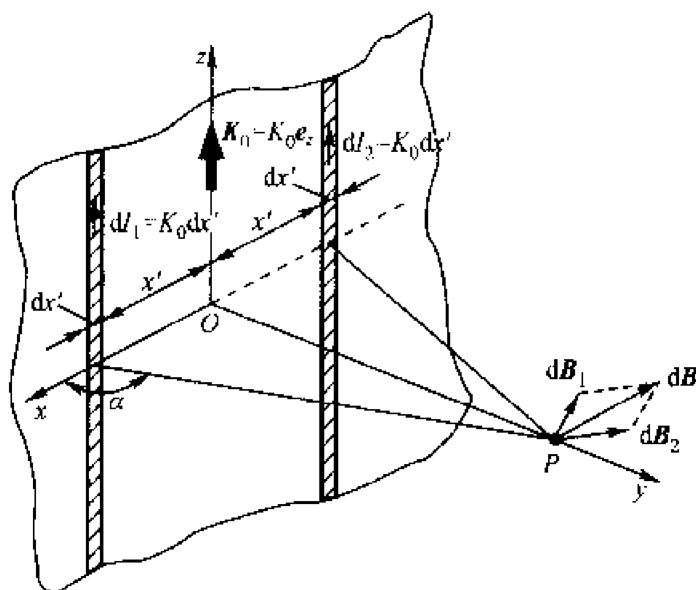
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mu_0 K_0\sin\alpha}{2\pi(x'^2 + y^2)^{1/2}}\mathrm{d}x'\right]\boldsymbol{e}_x$$

$$= -\frac{\mu_0 K_0 y}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x'}{x'^2+y^2}\boldsymbol{e}_x$$

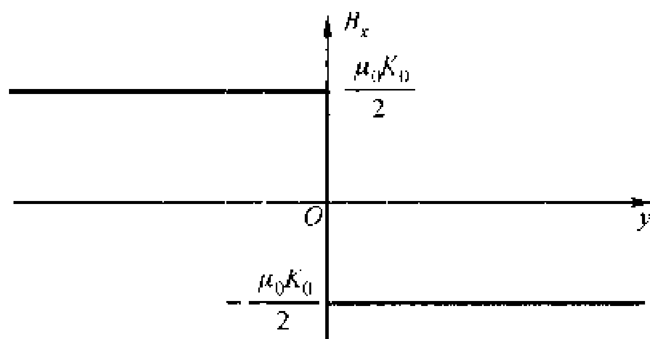
$$= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi}\arctan\left(\frac{x'}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{e}_x$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 K_0}{2}\boldsymbol{e}_x & (y>0)\\[2ex] \dfrac{\mu_0 K_0}{2}\boldsymbol{e}_x & (y<0)\end{cases}$$

$\boldsymbol{B}$ 值随坐标 $y$ 的变化曲线如图 3－15(b)所示。




(a) 面电流分布离散化为无限多个线电流元的集合




(b) 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的变化曲线

图 3－15　无限大载流片的磁场

(2) 解法二:应用真空中的安培环路定律求解

此时，无限大载流片如前放置，但为便于分析，重绘题图如图 3－16 所示。根据物理直观上的分析与判断，可以确认待求磁场分布具有以下基本特征：

① 场中 $\boldsymbol{B}$ 的方向如图 3－16 所示，沿 $x$ 轴平行于 $xOz$ 平面（在 $y>0$ 域内，为 $(-\boldsymbol{e}_x)$ 方向；在 $y<0$ 域内，为 $\boldsymbol{e}_x$ 方向），且关于 $xOz$ 平面对称；

② $\boldsymbol{B}$ 的数值与 $x$ 无关；

③ 如图 3－16 所示，为关于 $z$ 轴的平行平面磁场。

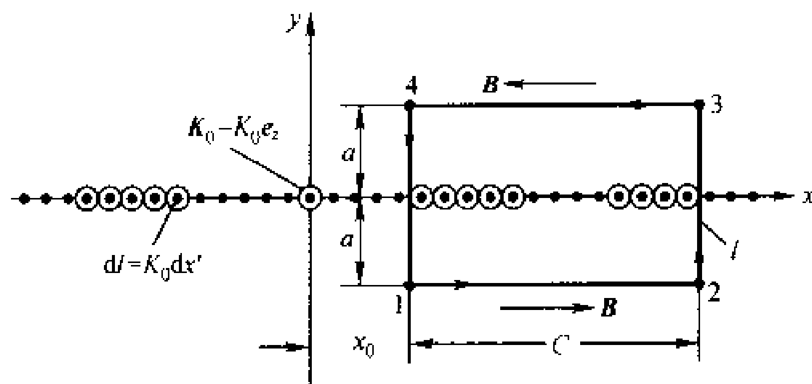



图 3－16　基于安培环路定律应用的无限大载流片磁场的分析

因而可在 $z=0$ 平面内，取如图所示的矩形回路 $l$，使之适应真空中的安培环路定律求解的需要。由式(3－27)可得

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_1^2 B_x\boldsymbol{e}_x\cdot \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + 0 + \int_3^4 -B_x\boldsymbol{e}_x\cdot(-\mathrm{d}x)(-\boldsymbol{e}_x)+0$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+C} B_x\mathrm{d}x - \int_{x_0+C}^{x_0} B_x\mathrm{d}x = 2B_xC$$

$$= \mu_0\int_{x_0}^{x_0+C}\mathrm{d}I = \mu_0K_0C$$

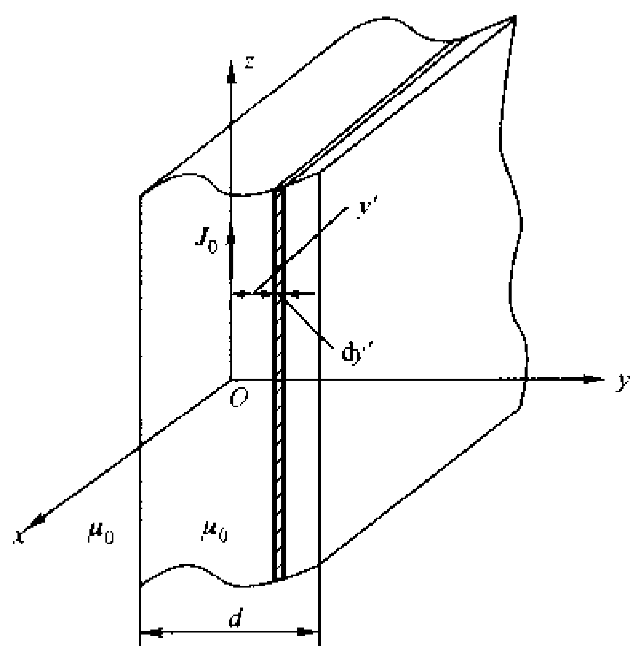
从而得

$$B_x = \frac{\mu_0K_0}{2}$$

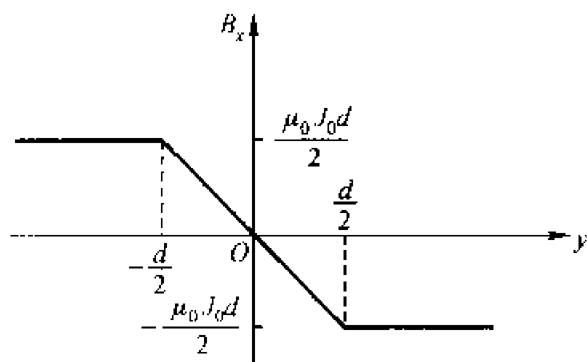
显然，以上两种分析方法所得结果一致。

**例 3－6**　计算真空中载有恒定体电流密度 $\boldsymbol{J}_0$ 的无限大导板（厚度为 $d$）所引起的磁感应强度。

［解］　如图 3－17(a)所示，采用直角坐标系，令该导板对称于 $xOz$ 平面放置，且体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与 $z$ 方向一致，即有 $\boldsymbol{J}_0=J_0\boldsymbol{e}_z$。此时，如前所述，首先，应将体电流分布离散化为无限多个相互平行的面电流片 $\mathrm{d}K=J_0\mathrm{d}y'$ 的集合。这样，由例 3－5 已知，任一面电流片在其两侧产生的元磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的量值为 $\mu_0\mathrm{d}K/2$，其方向平行于面电流片所在的平面，即取平行于 $x$ 轴的方向。然后，应




(a) 体电流分布离散化为无限多个面电流的集合




(b) 磁感应强度 $B$ 的变化曲线

图 3－17　无限大载流导板的磁场

用叠加原理，可分区解得

(1) 在 $y>\frac{d}{2}$ 域内

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x=-\int\frac{\mu_0\mathrm{d}K}{2}\boldsymbol{e}_x=-\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\frac{\mu_0J_0\mathrm{d}y'}{2}\boldsymbol{e}_x$$

$$=-\frac{\mu_0J_0d}{2}\boldsymbol{e}_x$$

(2) 在 $y<-\frac{d}{2}$ 域内

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\frac{\mu_0J_0\mathrm{d}y'}{2}\boldsymbol{e}_x$$

$$= \frac{\mu_0 J_0 d}{2} e_x$$

(3) 在 $-\frac{d}{2} \leqslant y \leqslant \frac{d}{2}$ 域内

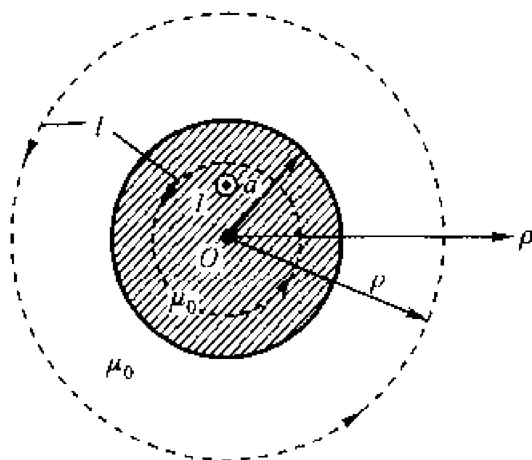
$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{e}_x = \int_{-\frac{d}{2}}^{y} -\frac{\mu_0 J_0 \mathrm{d}y'}{2} \boldsymbol{e}_x + \int_{y}^{\frac{d}{2}} \frac{\mu_0 J_0 \mathrm{d}y'}{2} \boldsymbol{e}_x$$

$$= -\mu_0 J_0 y \boldsymbol{e}_x$$

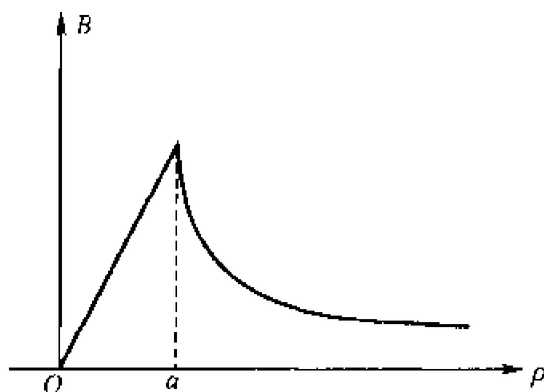
$\boldsymbol{B}$ 值随坐标 $y$ 的变化曲线如图 3－17(b)所示。

**例 3－7** 计算真空中半径为 $a$，载流为 $I$ 的无限长直圆柱形铜导体内部和外部的磁场。

**[解]** 本例为一具有圆柱对称性的平行平面磁场问题，宜于应用安培环路定律。采用圆柱坐标系，如图 3－18 所示，令导线的轴线与 $z$ 轴相重。由对称




(a) 长直圆柱形铜导体截面




(b) 导体内、外 $B$ 的变化曲线

图 3－18 无限长直圆柱形载流导体的磁场

性分析易知，圆柱导体内、外各点 $\boldsymbol{B}$ 的方向均沿 $\boldsymbol{e}_\phi$ 的方向，且在围绕 $z$ 轴的任何圆形路径上 $B$ 值为常量。如图示，在导体内、外分别选取圆形积分路径 $l$，且令积分路径方向与 $I$ 的方向服从右手定则。应用真空中的安培环路定律，可得

(1) 导体内部($\rho<a$)

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho B = \mu_0 \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I$$

故有

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi \quad (\rho \leqslant a)$$

(2) 导体外部($\rho>a$)

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho B = \mu_0 I$$

故有

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi \quad (\rho \geqslant a)$$

圆柱导体内、外 $\boldsymbol{B}$ 值随坐标 $\rho$ 的变化曲线示于图 3-18(b)。

### 3.4.2 场分布：基于矢量磁位 A 的分析

如前所述，基于恒定磁场的无散性，可以定义矢量磁位函数 $\boldsymbol{A}$，该矢量磁位与基本场量的关系为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

根据给定的源量(电流)分布，即可由式(3-31)直接积分求得场中任一点的矢量磁位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，现重记于下：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

若给定为面、线分布形态的电流，则按元电流间的代换关系式(3-35)，即可由上式分别导得相应的关于矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的直接积分计算式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' \qquad (3-38)$$

和

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (3-39)$$

然后，由所得矢量磁位 $\boldsymbol{A}$，按式(3-32)求旋度的微分运算，最终可算得待求场点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$。应指出，虽然矢量磁位的引入并没有任何具体的物

理意义，是一个纯粹的计算辅助量，但由往后各相关实例中的分析可知，矢量磁位的应用，显而易见地简化了典型的二维磁场(平行平面磁场或轴对称磁场)问题的分析计算。

**例 3-8** 空气中一长度为 $l$ 的短铜线是闭合环路的一部分，它位于坐标原点，设导线中电流为 $I$，沿 $z$ 轴方向，如图 3-19 所示。求远离该载流导线处($r \gg l$)空间各点的矢量磁位和磁感应强度。

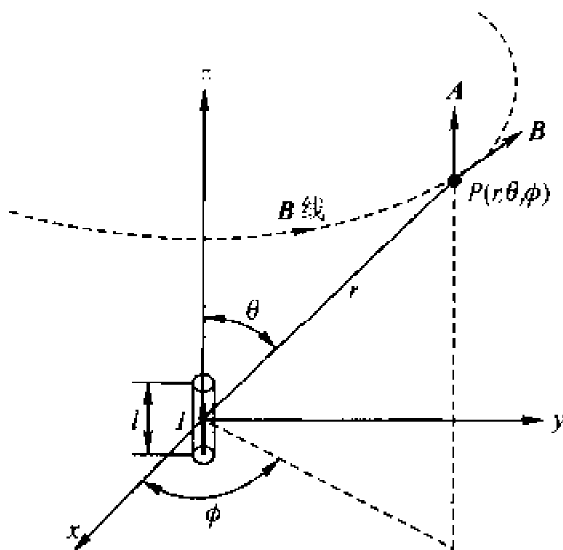



图 3-19 短载流导线的磁场

**[解]** 在远离载流导线处($r \gg l$)，短载流导线可视作为一个线电流元。因此，根据式(3-39)，场点 $P$ 处的矢量磁位

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{r} = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r}\boldsymbol{e}_z$$

为简捷地求出磁感应强度，宜将以上已解得的矢量磁位改写为球坐标系下的表达式，即根据附录一中单位矢量间的转换关系，上述矢量磁位应表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r}(\boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)$$

这样，磁感应强度

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2}(\sin\theta)\boldsymbol{e}_\phi \quad (3-40)$$

**例 3-9** 计算空气中长度为 $2L$ 的长直载流细导线在其中截面(图 3-20 中的 $xOy$ 平面)上的矢量磁位和磁感应强度。

**[解]** 取 $xOy$ 平面上场点 $P(x,y,0)$，由于电流沿 $z$ 轴方向，故矢量磁位只有 $z$ 方向分量，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_z\boldsymbol{e}_z\\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}z'}{R}\boldsymbol{e}_z\\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\boldsymbol{e}_z\\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\ln(L+\sqrt{\rho^2+L^2})-\ln\rho]\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

当 $L\gg\rho$ 时,可表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_z \quad (3-41)$$

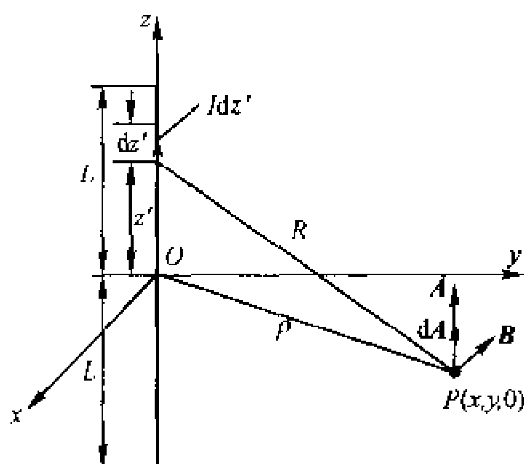



图 3-20 长度为 $2L$ 的长直载流细导线的磁场

从而得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla\times\boldsymbol{A}\\ &= -\left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

以上结果与其他方法所得结果(如例 3-4)相符。

当所求解的磁场问题涉及场空间中内、外边界条件的影响时,为构造如前 2.5 节所论由边值问题描述的数学模型,必须导出矢量磁位 **A** 应当满足的偏微分方程。

由场的基本规律性[式(3-28)]出发,考虑到矢量磁位 **A** 的引入[式(3-32)],可得关于矢量磁位的所谓旋度方程,即

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{J}_c$$

应用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$,则有

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{J}_c \quad (3-42)$$

由亥姆霍兹定理可知,仅由式(3-32)定义的 **A** 并不是惟一的,还必须同时规定 **A** 的散度,才能惟一地确定 **A**。因此,为简化分析,令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \quad (3-43)$$

上式称为库仑规范。这样,式(3-42)变成

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{J}_c \quad (3-44)$$

可见,矢量磁位 **A** 满足矢量形式的泊松方程。式(3-31)显然是方程(3-44)的特解,即自由空间中的解。在无源区中,$\boldsymbol{J}_c=0$,则式(3-44)成为

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = 0 \quad (3-45)$$

这表明,在无源区中,矢量磁位 **A** 满足矢量形式的拉普拉斯方程。可以指出,在直角坐标系中,矢量形式的泊松方程及拉普拉斯方程均可分解为相应的三个坐标分量的方程。因此可以判定,基于满足给定边值的泊松和拉普拉斯方程存在

惟一解的惟一性定理，不仅第二章中的分离变量法，而且前述的镜像法也同样可适用于恒定磁场的求解。显然，这正是静电场与恒定磁场在若干分析计算方法与所得结果上可以类比的数学物理基础。

**例 3-10** 关于理想化的无限长直载流导线的矢量磁位解答的分析。

**[解]** 设一无限长直载流导线如图 3-21 所示，场点 $P$ 与电流 $I$ 相距 $\rho$。本例若单纯从数学直观上考虑，似乎令式(3-40)中的 $L\to\infty$ 即可获解。但事实上，如 $L\to\infty$，则意味着电流分布已不再局限于有限区域，而是延展至无限远，这与无限远处为矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的参考点不能相容，因而导致式(3-40)的计算结果趋于无限大。为此，可回顾对方程(3-44)的阐述，前已指出，式(3-31)为其特解，其中蕴含无限远为磁位参考点的物理条件。现为兼容本例理想化假设下的分析，可将方程(3-44)的特解修改为

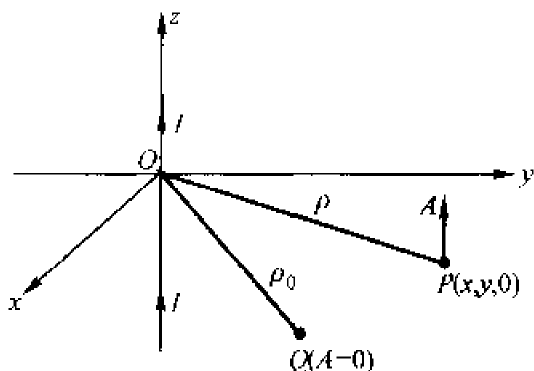



图 3-21 无限长直载流导线的磁场

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'+\boldsymbol{C}$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 为常矢量，取决于磁位参考点的选择。

由此，可在有限区域内任取一点为磁位参考点。如图 3-21 所示，设与电流 $I$ 相距 $\rho_0$ 的点 $Q$ 为所选取的磁位参考点，则根据式(3-41)，以及关于矢量磁位特解的讨论，应有

$$\boldsymbol{A}_Q=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{\rho_0}\right)\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{C}=0$$

故有

$$\boldsymbol{C}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{\rho_0}\right)\boldsymbol{e}_z$$

这样，最终可得无限长直载流导线的矢量磁位

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_z-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{\rho_0}\right)\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\qquad(3-46)$$

相应的磁感应强度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\nabla\times\boldsymbol{A}\\&=-\left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

与已知结果相符，即以上分析得证。

**例 3－11**　计算图 3－22 中无限长直平行输电线的矢量磁位。

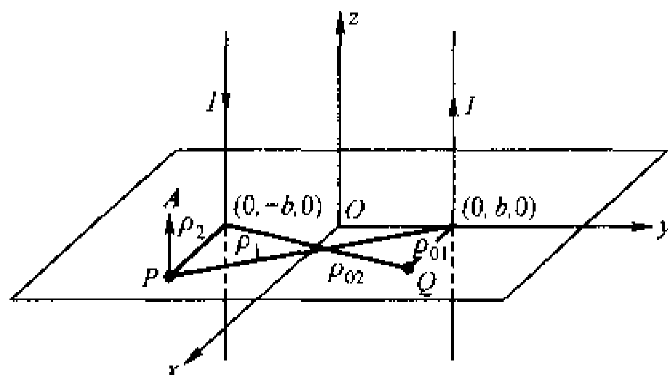



图 3－22　无限长直平行输电线的磁场

［解］　本例为平行平面磁场，故只需计算 $xOy$ 平面中任一场点 $P$ 处的矢量磁位。由于恒定电流在导线内均匀分布，且设两导线间距离远大于导线半径，故对导线以外的磁场可以认为电流集中在几何轴线上。根据例 3－10，现设定某磁位参考点 $Q$，令该参考点至两导线的距离分别为 $\rho_{01}$ 和 $\rho_{02}$。按图 3－22 中设定的场点 $P$ 处的矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的方向，由式(3－46)，并应用叠加原理，可得两平行输电线产生的合成矢量磁位为

$$\boldsymbol{A} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_{01}}{\rho_1}\right) - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_{02}}{\rho_2}\right)\right]\boldsymbol{e}_z$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}\right)\right]\boldsymbol{e}_z$$

为简化计算结果，可将磁位参考点选定于 $x$ 轴上，则有 $\rho_{01} = \rho_{02}$，因此，最终得

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{x^2 + (y + b)^2}{x^2 + (y - b)^2}\right]\boldsymbol{e}_z \qquad (3-47)$$

若把 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 代入磁通的计算式，可得

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

再应用斯托克斯定理，将上式中的面积分变换成线积分，即

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

从而有

$$\Phi = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (3-48)$$

这就是由矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 计算磁通的关系式。在往后典型问题分析中，也可由此进一步看出矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的应用价值。

### 3.4.3 场分布：基于标量磁位 $\varphi_m$ 的分析

在无源区中，因 $\boldsymbol{J}_c=0$，故有 $\nabla\times\boldsymbol{B}=0$。这表明，无源区中矢量场 $\boldsymbol{B}$ 是无旋的，可以引入一个标量位函数 $\varphi_m$，而令该标量场 $\varphi_m$ 的梯度表征无源区中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{B}=-\mu_0\nabla\varphi_m \tag{3-49}$$

这一标量函数 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ 称为标量磁位。标量磁位的 SI 单位是安培(A)。由上述标量磁位引入的先决条件：$\nabla\times\boldsymbol{B}=0$，可见标量磁位 $\varphi_m$ 的应用仅限于无电流分布区域中的恒定磁场。此外，标量磁位 $\varphi_m$ 与电位 $\varphi$ 不同，电位具有明确的物理意义，即与电场力移动单位正电荷所作的功有关。但在磁场中，磁场力总是垂直于磁感应强度，因此标量磁位与磁场力作功并无联系，它不具有任何具体的物理意义，纯粹是一个计算辅助量。

由标量磁位值相等的各点所形成的等值面，称为等磁位面，其方程为

$$\varphi_m(\boldsymbol{r})=\varphi_m(x,y,z)=C \tag{3-50}$$

式中 $C$ 是常数。取决于不同的 $C$ 值，可获得一系列等磁位面，这些等磁位面应处处与 $\boldsymbol{B}$ 线正交，从而可直观地由标量磁位场 $\varphi_m$ 的分布描绘相应磁场线的分布。

与静电场中电压的定义相仿，可以写出自由空间中 $P$ 和 $Q$ 两点间磁位差为

$$U_{mPQ}=\int_P^Q\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$$

在上式中，根据式(3-49)，并考虑到方向导数与梯度之间的关系式(1-25)，即 $\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial l}=\nabla\varphi_m\cdot\boldsymbol{e}_l$，故 $\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=-\nabla\varphi_m\cdot\boldsymbol{e}_l dl=-d\varphi_m$，从而有

$$U_{mPQ}=\int_P^Q\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{\varphi_{mP}}^{\varphi_{mQ}}d\varphi_m=\varphi_{mP}-\varphi_{mQ} \tag{3-51}$$

即等于两点的标量磁位之差。

应该指出，当磁场中存在电流分布时，两点间的磁位差不仅与该两点的位置有关，而且还与积分路径相关。参阅图 3-23，如取一与电流 $I$ 相互交链的闭合路径 $PnQmP$，则根据真空中的安培环路定律，应有

$$\oint_{PnQmP}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I$$

可将上式写作

$$\oint_{PnQ}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{PmQ}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \mu_0 I$$

显然，如取积分回路交链电流 $k$ 次（图 3－23 中闭合路径 $PrQmP$ 交链电流两次，即 $k=2$），则

$$\oint_{PrQmP}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 kI$$

即

$$\oint_{PrQ}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{PmQ}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \mu_0 kI$$

这表明，$P$、$Q$ 两点间磁位差与所取积分路径相关。换句话说，即使在场中选定了标量磁位的参考点，但其标量磁位仍是一个多值函数。由以上分析可见，磁位差和标量磁位多值性所差异的数值是与积分回路相互交链的电流值的整倍数（$=\mu_0 kI$）。虽然，这种多值性对于计算磁感应强度并没有影响，但工程分析依然要求磁位差和标量磁位为单值函数的表述。为此，当场中有电流分布存在时，对于标量磁位的应用，应采用引入磁屏障的方法。如参见图 3－24，规定在式(3－51)积分运算时，其积分路径 $l$ 不允许穿越载流回路所限定的某一曲面 $S$（磁屏障）。这样，得以避免闭合积分路径与电流之间的交链，从而保证 $\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，使两点间磁位差与积分路径无关。

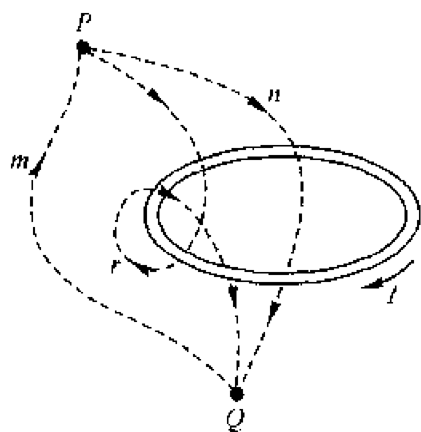



图 3－23　磁位差和标量磁位多值性的说明图

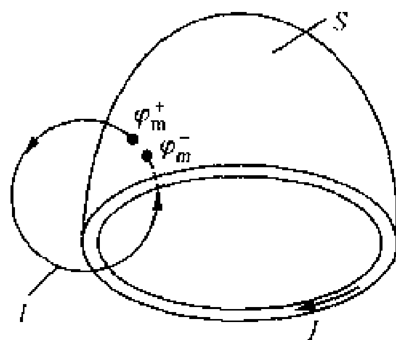



图 3－24　磁屏障设置的示意图

若选定 $Q$ 点为标量磁位参考点，则 $\varphi_{mQ}=0$，由式(3－51)可知，场中任意点 $P$ 的标量磁位

$$\varphi_{mP} = \int_P^Q \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3－52}$$

表述为 $P$ 点空间坐标的单值函数。

下面讨论由真空中载流回路所建立的标量磁位问题。如图 3－25 所示，根

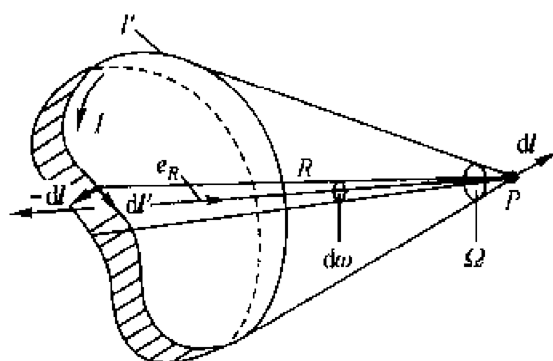



图 3 25 应用立体角表示载流回路建立的标量磁位

据毕奥－萨伐尔定律，载流回路 $l'$ 在真空中点 $P$ 处所产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

如果 $P$ 点有位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，则

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'} \frac{[\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'] \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'} \frac{[-\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'] \cdot (-\boldsymbol{e}_R)}{R^2}$$

上式中 $[-\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}']$ 表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 段作位移 $(-\mathrm{d}\boldsymbol{l})$ 后扫出的元面积，而 $\frac{[-\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'] \cdot (-\boldsymbol{e}_R)}{R^2}$ 则为该元面积对 $P$ 点所张的立体角 $\mathrm{d}\omega$*，据此，可得

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \mathrm{d}\omega$$

显然，载流回路 $l'$ 对 $P$ 点所张的立体角，随 $P$ 点的移动而变化。$P$ 点因位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所引起的立体角的变化值，应与 $P$ 点不动而载流回路作位移 $(-\mathrm{d}\boldsymbol{l})$ 产生的对 $P$ 点所张立体角的变化值相等。如以 $\mathrm{d}\Omega$ 表示此变化值，即得

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathrm{d}\Omega$$

由前已知 $\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{m}}$，因此

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{I}{4\pi}\mathrm{d}\Omega = -\mathrm{d}\left(-\frac{I}{4\pi}\mathrm{d}\Omega\right) = -\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{m}}$$

故得

---

* 定义式

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

表示元面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对距其 $R$ 远处 $P$ 点所张的立体角。式中 $\boldsymbol{e}_R$ 为由 $P$ 点指向元面积的距离 $R$ 的单位矢量。立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 是标量，可正可负；单位是球面度(sr)。

$$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi}\Omega \tag{3-53}$$

式中 $\Omega$ 就是载流回路对观察点(场点)所张的立体角。若在观察点看到回路上的电流是顺钟向时,$\Omega$ 为正,此时,愈接近载流回路之点,$\Omega$ 的绝对值愈大,标量磁位愈小;反之,$\Omega$ 为负,同理可推。

**例 3-12** 应用标量磁位计算磁偶极子的磁场。

**[解]** 磁偶极子是常用于 3.5 节中物质磁化理论的概念。如图 3-26 所

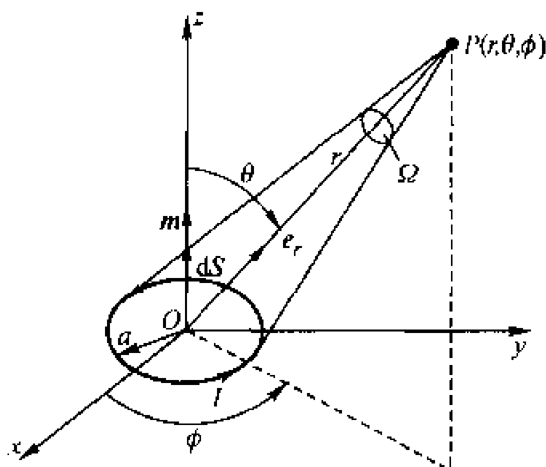



图 3-26 磁偶极子的磁场

示,位于坐标原点的磁偶极子是一个很小的圆形载流回路,场中任意点到回路中心距均远大于回路的尺度。定义 $\boldsymbol{m} = I\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,称为磁偶极子的磁偶极矩(简称磁矩),其 SI 单位是安·米$^2$(A·m$^2$)。现以无限远为标量磁位参考点。对于任意场点 $P(r,\theta,\phi)$,磁偶极子元面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对该点所张的立体角为

$$\Omega = \frac{(-\mathrm{d}\boldsymbol{S})\cdot(-\boldsymbol{e}_r)}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

因此,根据式(3-53),可得

$$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi}\Omega' = \left(-\frac{I}{4\pi}\right)(-\Omega) = \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi r^2} \tag{3-54}$$

从而磁感应强度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= -\mu_0 \nabla \varphi_m \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}[(2\cos\theta)\boldsymbol{e}_r + (\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta]\end{aligned} \tag{3-55}$$

令人感兴趣的是,上式与式(2-32)相互对应。换句话说,磁偶极子的磁场线与电偶极子远区的电场线有相同的分布形态。但是,一个基本差别是:电偶极子的电场线起始于正电荷,而终止于负电荷,而磁场线却是自身闭合的。

由图 3-24 可见,在磁屏障两侧标量磁位是不连续的,显然,在其两侧应有

$$\varphi_m' - \varphi_m = I$$

上式相当于在磁屏障两侧可以假想存在正负磁荷。可以看出,引入虚构磁荷的概念,磁场线就不可能闭合,它将起始于正磁荷,而终止于负磁荷。这样,恒定磁场转化为无旋场,所以它可以表示为一个标量场的梯度。但是,至今实验从未观察到孤立的磁荷,因此,在数学模型中引用磁荷观点,纯粹出于借用静电学知识来讨论静磁学问题的需要,其中包括在工程磁场问题的分析计算中,借以构成简便而有效的数值计算方法。

由于恒定磁场的无散性,$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$,故根据标量磁位的定义式(3-49),可得

$$\nabla \cdot (-\mu_0 \nabla \varphi_m) = -\nabla \varphi_m \cdot \nabla \mu_0 - \mu_0 \nabla \cdot \nabla \varphi_m = 0$$

因媒质均匀,$\nabla \mu_0 = 0$,因此

$$\nabla \cdot (-\mu_0 \nabla \varphi_m) = -\mu_0 \nabla \cdot \nabla \varphi_m = -\mu \nabla^2 \varphi_m = 0$$

亦即

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \qquad (3-56)$$

可见,标量磁位 $\varphi_m$ 满足拉普拉斯方程。这样,对于一般性问题的分析,可根据边界条件,由所构造的边值问题出发,解出待求的标量磁位。

### 3.4.4 磁 场 线

与电场线在形象化描绘电场中所起的作用一样,磁场线同样在形象化描绘磁场中起着定性乃至定量分析的重要作用。

类比于由 $\boldsymbol{E}$ 线定义出发导得 $\boldsymbol{E}$ 线微分方程(2-34)的过程,在直角坐标系中,由共线条件 $\boldsymbol{B} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$,可知 $\boldsymbol{B}$ 线所满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{B_x} = \frac{\mathrm{d}y}{B_y} = \frac{\mathrm{d}z}{B_z} \qquad (3-57)$$

上式的解即是 $\boldsymbol{B}$ 线的方程。

对于平行平面磁场,按所设定的直角坐标系,当给定场源 $\boldsymbol{J} = J_z \boldsymbol{e}_z$ 时,则场中各点的矢量磁位 $\boldsymbol{A} = A_z \boldsymbol{e}_z$。由此即得相应的磁感应强度分量为:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = 0 \qquad (3-58)$$

将以上结果代入式(3-57),使得

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

即

$$\mathrm{d}A_z = 0$$

所以

$$A_z = \text{常量} \qquad (3-59)$$

由此可见,在平行平面磁场中,$A$ 等于定值的轨迹即为 $\boldsymbol{B}$ 线。显然,以等 $A$ 线来

描绘 **B** 线可以极大地简化场图的绘制。出于定量分析的需要，为使 **B** 线的分布密度描绘出磁场分布的强弱，还必须遵循相邻两磁场线间的磁通量 $\Delta\Phi$ 相等的原则。以图 3－27 所示长直载流导线的磁场为例，通过单位轴向长度($\Delta z=1$)的磁通量 $\Delta\Phi$ 为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \int_{\Delta S}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\int_0^1 A_{z1}\mathrm{d}z-\int_0^1 A_{z2}\mathrm{d}z=(A_{z1}-A_{z2})\int_0^1\mathrm{d}z\\&=\Delta A_z\end{aligned}$$

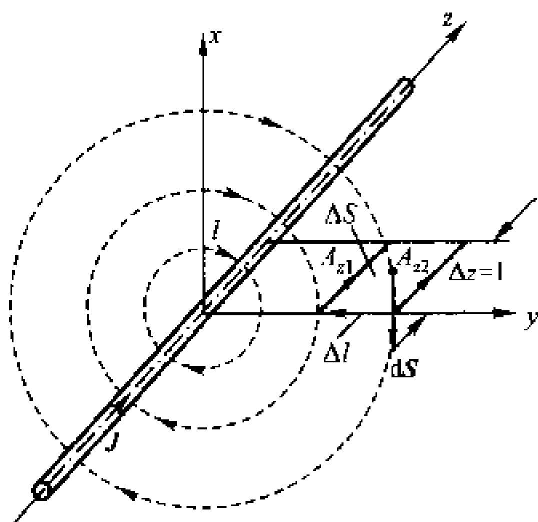



图 3－27　长直载流导线的磁场

可见，如应用矢量磁位 **A**，则遵循相邻等 $A$ 线间的差值 $\Delta A=k$(某一指定值)这一原则作图，即可定量地描绘出平行平面磁场的分布。

对于轴对称磁场，按所设定的圆柱坐标系，当给定场源 $\boldsymbol{J}=J_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ 时，对应的矢量磁位 **A** 也只有一个分量 $A_\phi$，即 $\boldsymbol{A}=A_\phi\boldsymbol{e}_\phi=A\boldsymbol{e}_\phi$，因此，同样为方便地绘制轴对称磁场的场图提供了有效的方法。根据共线条件，同前理，圆柱坐标系中具有轴对称分布特征的 **B** 线所满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{B_\rho}=\frac{\mathrm{d}z}{B_z}\tag{3-60}$$

而相应的磁感应强度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}&=-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)\boldsymbol{e}_z\\&=B_\rho\boldsymbol{e}_\rho+B_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{3-61}$$

将以上 $B_\rho$ 和 $B_z$ 两分量的矢量磁位表达式代入式(3-60),便可得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)\mathrm{d}\rho+\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

即

$$\mathrm{d}(\rho A_\phi)=\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

所以

$$\rho A_\phi=\text{常量} \tag{3-62}$$

这表明,在轴对称磁场中,$\rho A_\phi$ 等于定值的轨迹即为 $\boldsymbol{B}$ 线。很明显,由于 $\rho A_\phi$ 为标量,依此描绘 $\boldsymbol{B}$ 线自然相当简便。

**例 3-13** 分析两线输电线(例 3-11)的磁场分布图形。

**[解]** 由两线输电线磁场的矢量磁位解,即式(3-47),根据该平行平面磁场的 $\boldsymbol{B}$ 线方程(3-59),可得

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}=\frac{x^2+(y+b)^2}{x^2+(y-b)^2}=k\quad(\text{常量}) \tag{3-63}$$

比照静电场 2.6.2 节中两线电荷(一对电轴)电场的分析,即由上式与式(2-107)的对应关系,可见,$\boldsymbol{B}$ 线族为包围两导线几何轴线(两线电流 $I$)的偏心圆族,也就是说,本例磁场线分布图形与图 2-25 中等位线分布的图形相同。

## 3.5 媒质中的磁场

在前节,为了突出讨论源量与场量之间的关系,场空间被典型化为理想的无界自由空间(真空),也包括无界均匀媒质(如空气)空间。但是,工程磁场问题总存在有某些实体媒质,特别是广泛采用的铁磁媒质,这时,场与媒质间的相互作用,导致合成的磁场效应。换句话说,必须计及基于物质磁化效应的媒质电磁性能的作用,才能得以分析计算媒质中的磁场问题。

### 3.5.1 媒 质 磁 化

根据物质的基本原子模型,原子中的电子围绕原子核作轨道运动,形成一个闭合的环形电流,相当于一个已在例 3-12 中讨论的微观的磁偶极子,它具有的磁偶极矩称为轨道磁矩。另一方面,电子及原子核均因自旋运动,也相应地形成微观的磁偶极子,其磁偶极矩称为自旋磁矩。应指出,源于原子核自旋的磁矩与电子轨道运动或电子自旋而具有的磁矩相比,通常是可以忽略的,这是因为原子

核的质量大得多而其角速度又低得多的缘故。在通常情况下，因热运动，这些磁偶极子具有随机的方向，从而宏观的合成磁矩为零，物质对外不显磁性。当存在外加磁场时，电子在磁场的作用下，会导致自旋磁矩的规则排列；还会由于改变了电子的轨道运动而产生感应磁矩，呈现宏观的合成磁矩不再为零的磁化现象。这时，处于外磁场中的媒质对外显现磁性，即产生磁场。

为描述媒质的宏观磁化状态，定义单位体积中微观磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的矢量和，称为磁化强度矢量，以 $\boldsymbol{M}$ 表示，即

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{m}}{\Delta V}\qquad (\text{单位:A/m}) \tag{3-64}$$

媒质被磁化后出现的净磁矩，也可看作是在媒质中出现了等效的宏观束缚电流，即所谓磁化电流的结果。下面讨论磁化电流与磁化强度之间的关系。

设已磁化的媒质体积为 $V'$，如图 3－28 所示。若磁化强度为 $\boldsymbol{M}$，则体积元

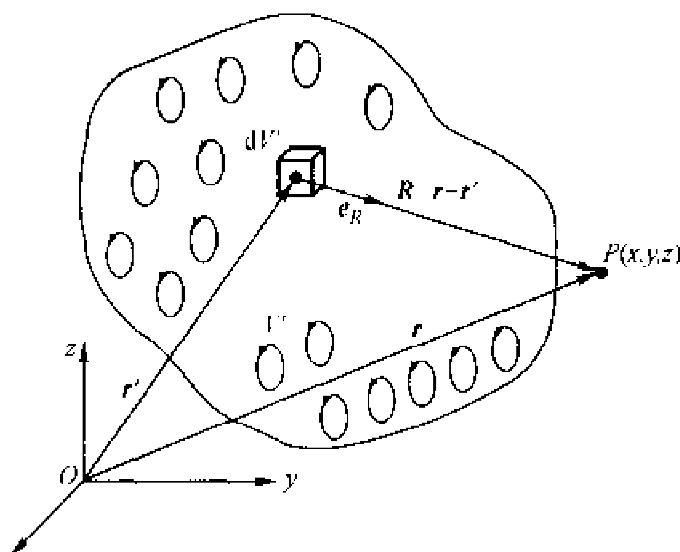



图 3－28　磁化媒质建立的磁场

$\mathrm{d}V'$ 的磁矩为 $\mathrm{d}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}\mathrm{d}V'$，参照式(3－55)，并基于 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的基本关系，不难推出该磁矩产生的矢量磁位

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V'$$

因而体积 $V'$ 的总磁矩所产生的矢量磁位

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\boldsymbol{M}\times\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{3-65}$$

根据矢量恒等式[附录二中式(5)]

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{R}\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')-\nabla'\times\left[\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\right]$$

代入式(3-65),得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\times\left[\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\right]\mathrm{d}V' \quad (3-66)$$

利用矢量恒等式[附录二中式(14)] $\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S$,上式右端第二个积分项可表示为

$$\int_{V'}\nabla'\times\left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right)\mathrm{d}V'=\oint_{S'}\boldsymbol{e}_n\times\left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right)\mathrm{d}S'$$

式中 $S'$ 为包围 $V'$ 的闭合面;$\boldsymbol{e}_n$ 为 $S'$ 的外法线方向的单位矢量。由此,式(3-66)可表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' \quad (3-67)$$

将上式与式(3-31)和(3-38)相比较,可以看出,上式体积分中的($\nabla'\times\boldsymbol{M}$)相当于磁化体电流密度 $\boldsymbol{J}_m$;面积分中的($\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n$)相当于磁化面电流密度 $\boldsymbol{K}_m$,即:

$$\boldsymbol{J}_m=\nabla'\times\boldsymbol{M} \quad (3-68)$$

$$\boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n \quad (3-69)$$

利用斯托克斯定理,由式(3-68)可得

$$\oint_l\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{M})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=I_m \quad (3-70)$$

式中 $I_m$ 为磁化电流。上式表明,在磁化媒质中,磁化强度沿任一闭合回路的环量等于该闭合回路所包围的总磁化电流。

**例 3-14** 已知半径为 $a$,长度为 $L$ 的圆柱形磁性材料,沿轴线方向被均匀磁化。若轴向磁化强度为 $\boldsymbol{M}$,试求在圆柱轴线上远大于圆柱尺度处由磁化电流产生的磁感应强度。

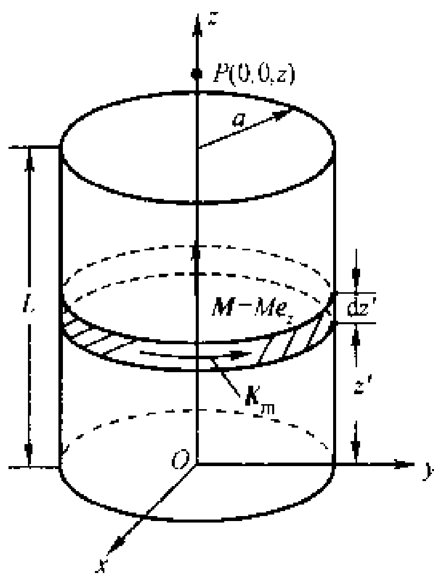



图 3-29 均匀磁化的圆柱

**[解]** 选取圆柱坐标系,令磁化圆柱的轴线与 $z$ 轴相重,且置于 $xOy$ 平面上,如图 3-29 所示。由于均匀磁化,在圆柱内部,磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 为一常矢量,因此,$\boldsymbol{J}_m=\nabla'\times\boldsymbol{M}=0$,即不存在磁化体电流密度。另一方面,该圆柱表面上的磁化面电流密度 $\boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n$。因 $\boldsymbol{M}=M\boldsymbol{e}_z$,故 $\boldsymbol{K}_m$ 仅存在于圆柱侧壁,而在上、下圆柱端面上的磁化面电流密度为零。这样,

$\boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{e}_n = M\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_n = M\boldsymbol{e}_\phi$。可见，从磁效应考察，该磁体如同一个载有面电流密度 $\boldsymbol{M}$ 的圆柱形薄层。现首先如图截取宽度为 $\mathrm{d}z'$ 的环形元电流 $\boldsymbol{K}_m\mathrm{d}z'$，它可被看作为如例 3-12 讨论的磁偶极子，因此由式(3-55)可求该环形元电流在轴线上 $P$ 点处($z \gg a, L$)产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 a^2 K_m}{2(z-z')^3}\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_z$$

故侧壁上全部磁化电流在 $P$ 点产生的合成磁感应强度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{B} \\ &= \frac{\mu_0 a^2 K_m}{2}\int_0^L \frac{\mathrm{d}z'}{(z-z')^3}\boldsymbol{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 a^2 K_m}{4}\left[\frac{1}{(z-L)^2} - \frac{1}{z^2}\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

### 3.5.2 磁场强度 $\boldsymbol{H}$·一般形式的安培环路定律

基于前节讨论可知，媒质在外磁场作用下发生的磁化效应，可归结为等效磁化电流的分布。因此，存在媒质时的磁场，可以看作在真空中由励磁电流 $I$ 和磁化电流 $I_m$ 共同建立的合成磁场。这样，根据真空中的安培环路定律，应有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left(\sum I + \sum I_m\right)$$

式中 $\sum I$ 和 $\sum I_m$ 分别是闭合回路 $l$ 所限定面积上穿过的励磁电流和磁化电流的代数和。将式(3-70)代入上式，得

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left(\sum I + \oint_l \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)$$

即

$$\oint_l\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I \qquad (3-71)$$

定义一个新的场量——磁场强度 $\boldsymbol{H}$，令

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \qquad (\text{单位:A/m}) \qquad (3-72)$$

这样，式(3-71)又可写为

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I \qquad (3-73)$$

这就是磁场中安培环路定律的一般形式，它对媒质中和真空中的磁场都适用。

定律表明，磁场强度沿任一闭合曲线的环量等于该闭合曲线所限定面积上穿过的传导电流的代数和，而与媒质的分布无关。由此可见，磁场强度的引入简化了媒质中磁场的分析计算，正如使用电位移矢量可以简化电介质中电场的计算一样。必须指出，式(3－73)表明，$\boldsymbol{H}$ 的环量仅与传导电流有关，但这决非意味着 $\boldsymbol{H}$ 的分布与媒质无关，因为如式(3－72)所示，$\boldsymbol{H}$ 本身就表征着媒质磁化的物理本质。

式(3－73)即是恒定磁场基本规律性的一个方面的描述[式(3－24a)]，利用斯托克斯定理，可得其微分形式的表述[式(3－25a)]。

对于大多数媒质，磁化强度与磁场强度成正比，即

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{3-74}$$

式中 $\chi_m$ 称为磁化率，是一个量纲为一的纯数。将式(3－74)代入式(3－72)，可得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H}$$

令

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

则有

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \tag{3-75}$$

上式称为媒质特性的构成方程。式中 $\mu$ 称为媒质的磁导率，单位是亨/米(H/m)。实际中经常使用磁导率的相对值，即所谓相对磁导率 $\mu_r$，定义为

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m \tag{3-76}$$

$\chi_m$、$\mu$ 和 $\mu_r$ 都是表征媒质磁化性能的参量。根据媒质的磁化性能，可分为以下三种类型：

(1) 抗磁性媒质：当不存在外磁场时，这类媒质的任一原子中的合成磁矩为零。在外磁场作用下，其内部作轨道运动的电子将受力，引起角速度微扰，产生净磁矩，属感应磁化过程。由此产生的附加磁矩方向总是与外磁场方向相反，导致媒质中合成磁场减弱。这种磁性能称为抗磁性，如银、铜、铋、锌、铅和汞等属抗磁性媒质($\mu_r<1$，且 $\mu_r\approx1$，而 $\chi_m$ 为一很小的负数)。

(2) 顺磁性媒质：当不存在外磁场时，这类媒质的原子中合成磁矩并不为零，仅因热运动之故，其宏观的合成磁矩为零。在外磁场作用下，除了引起非常弱的上述抗磁效应外，还使磁偶极子的磁矩沿外磁场方向规则排列，从而使合成磁场增强。这种磁性能称为顺磁性，如铝、锡、镁、钨、铂和钯等属顺磁性媒质($\mu_r>1$，且 $\mu_r\approx1$，而 $\chi_m$ 为一很小的正数)。

(3) 铁磁性与亚铁磁性媒质：这类媒质在外磁场作用下会发生显著的磁化现象。在此种媒质内部存在"磁畴"，每个磁畴中的磁矩方向相同，但各个磁畴磁矩取向的随机性，使之对外不显示磁性。在外磁场作用下，大量磁畴发生转动，

各个磁畴方向趋向一致，且磁畴体积增大，因而产生显著的磁性，如铁、镍、钴等属这类铁磁性媒质（$\mu_r \gg 1$，$\chi_m$ 为一很大的正数）。这种铁磁性媒质的磁性能还存在非线性、磁滞与剩磁现象。另一类称为亚铁磁性媒质，如铁氧体等，其磁化现象稍逊于铁磁媒质，但剩磁小，且电导率很低。

值得指出，铁磁媒质因其高磁导率的特性，在电磁装置中得到了极其广泛的应用，以满足工程上高磁场能量密度和高磁场强度的应用需求。同样，铁氧体因其电导率很低，高频电磁波可以进入其中，且具有如高频下涡流损耗小等一些可贵的特性，从而在高频和微波器件中获得广泛的应用。

与电介质的电性能一样，媒质的磁性能也有均匀与非均匀，线性与非线性，各向同性与各向异性等特点。若媒质的磁导率不随空间变化，则称为均匀磁媒质；反之，则称为非均匀磁媒质。若磁导率与外加磁场强度的大小与方向均无关，即磁感应强度与磁场强度成正比，如式(3－75)所示，则称为各向同性的线性磁媒质。各向异性的磁媒质（如冷轧硅钢片、铁氧体），其磁导率一般情况下应为一个三维二阶张量，含有9个分量，从而磁媒质的构成方程[式(3－75)]应表示为

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{H} \qquad (3-77)$$

### 3.5.3 不同媒质分界面上的边界条件

类同于静电场(2.4.3节)、恒定电流场(3.1.3节)中的讨论，现从恒定磁场的散度和旋度特性出发，给出在不同媒质分界面上场量所应满足的物理条件（边界条件）。同时，鉴于恒定磁场中矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量磁位 $\varphi_m$ 的引入，讨论中也分别给出了由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\varphi_m$ 表述的不同媒质分界面上的边界条件。

(1) 两种不同磁媒质分界面上的边界条件

对应于积分形式的散度方程(3－24b)，应有

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad (3-78)$$

由此表明，在两种磁媒质分界面上的磁感应强度的法向分量是连续的。

将旋度方程 $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 应用于跨越分界面的一狭小的矩形回路 $l$，如图3－30所示。设界面上存在有穿越该闭合回路所围面积的面电流密度 $\boldsymbol{K} = K\boldsymbol{e}_n'$（该面电流密度的单位矢量 $\boldsymbol{e}_n' = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n$，且与有向回路 $l$ 设定的方向符合右手定则）。这样，令 $\Delta l_2 \to 0$，由安培环路定律得

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_{1t}\Delta l_1 - H_{2t}\Delta l_1 = K\Delta l_1$$

故

$$H_{1t} - H_{2t} = K \qquad (3-79)$$

通常，分界面上不存在宏观的自由面电流分布，即 $K=0$，则有

$$H_{1t} = H_{2t} \qquad (3-80)$$

这表明，分界面上磁场强度的切向分量是连续的。应指出，理论上在理想导体（$\gamma \to \infty$）、超导体表面才可能有面电流 $\boldsymbol{K}$ 的存在。工程上，惟当电流集肤效应十分显著时，才有可能近似将导体表面的电流分布看作为等价的面电流分布。

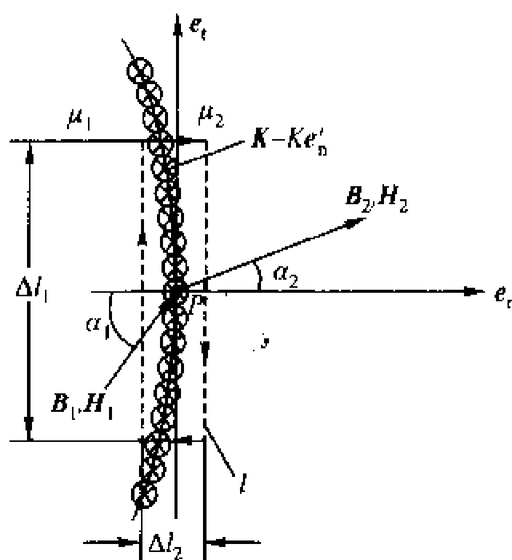



图 3-30 $\boldsymbol{H}$ 的旋度方程所对应的边界条件

显然，若该两种磁媒质均为线性且各向同性，即 $\boldsymbol{B}_1 = \mu_1 \boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{B}_2 = \mu_2 \boldsymbol{H}_2$，则当分界面上 $\boldsymbol{K}=0$ 时，分界面处 $\boldsymbol{B}$ 线和 $\boldsymbol{H}$ 线的折射规律为

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (3-81)$$

(2) 铁磁媒质（$\mu_1$）与空气（$\mu_2 \approx \mu_0$）分界面上的边界条件

此时，由于 $\mu_1 \gg \mu_2$，结合式(3-81)可知，必有：

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad H_{1t} = H_{2t} \approx 0 \qquad (3-82)$$

可见，在紧靠铁磁媒质与空气分界面的空气侧，$\boldsymbol{B}$ 线和 $\boldsymbol{H}$ 线均近乎垂直于界面。

对于矢量磁位 $\boldsymbol{A}$，基于定义式(3-32)不难推出，与式(3-78)、(3-79)相应的两种不同媒质分界面上的边界条件分别是：

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 \qquad (3-83)$$

和

$$\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \boldsymbol{A}_1)_t - \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \boldsymbol{A}_2)_t = K \qquad (3-84)$$

因为若在分界面上不满足式(3-83)，即矢量磁位不连续，则该处磁感应强度将趋于无限大，这显然是不合理的。如所论磁场属平行平面磁场，参照式(3-58)，可以导出，两种不同媒质分界面上的边界条件被简化为由矢量磁位 $\boldsymbol{A} = A_z \boldsymbol{e}_z$ 的一个分量 $A_z$ 表述的如下形式：

$$A_{z1} = A_{z2} \qquad (3-85)$$

和

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{z1}}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{z2}}{\partial n} = K \qquad (3-86)$$

而对应于铁磁媒质与空气分界面，与式(3-82)相应的边界条件简化为：

$$A_{z1}=A_{z2};\quad \frac{\partial A_{z1}}{\partial n}=\frac{\partial A_{z2}}{\partial n}=0 \tag{3-87}$$

对于标量磁位 $\varphi_m$，基于定义式(3-49)，不难推出，与式(3-78)、(3-80)相应的两种不同媒质分界面上的边界条件分别是：

$$\mu_1\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \tag{3-88}$$

和

$$\varphi_{m1}=\varphi_{m2} \tag{3-89}$$

而对应于铁磁媒质与空气分界面，由于铁磁媒质表面可看作为按式(3-50)所描述的等磁位面，因此与式(3-82)相应的边界条件为：

$$\mu_1\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n};\quad \varphi_{m1}-\varphi_{m2}=C \tag{3-90}$$

### 3.5.4 场分布：基于场量 H 的分析；边值问题；镜像法

(1) 基于场量 $\boldsymbol{H}$ 的分析

如同在真空中安培环路定律应用时，已经指出，对于一些具有对称性场分布特征的磁场问题，若能找到一条闭合曲线 $l$，在该曲线上，各点的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的数值相等，且 $\boldsymbol{H}$ 的方向与积分元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向之间有不变的夹角关系，则基于场量 $\boldsymbol{H}$，一般形式的安培环路定律[式(3-73)]是应用于媒质中磁场分析计算的基本方法之一。

**例 3-15** 在一含有气隙的环形铁心上紧密绕制 $N$ 匝线圈，如图 3-31 所示。环形铁心的磁导率为 $\mu(\mu\gg\mu_0)$，其平均半径为 $R$；截面半径为 $a\ll R$，气隙宽度为 $d\ll R$。当线圈载流为 $I$ 时，若忽略漏磁通，试求铁心及气隙中的磁感应强度和磁场强度。

**[解]** 在忽略漏磁通的假设下，铁心中 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的方向沿环形的圆周方向，且考虑到 $R\gg a$，可以认为铁心内磁场分布均匀。根据位于气隙的铁心两端面上的边界条件，即式(3-82)，可知气隙中的磁感应强度 $B_\delta$ 等于端面处铁心中磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量 $B_n$。由于气隙宽度 $d\ll R$，故 $B_n$ 即可被近似看作该处的 $B$，而有

$$\mu_0H_\delta=\mu H \tag{3-91}$$

应用安培环路定律，可得

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=NI$$

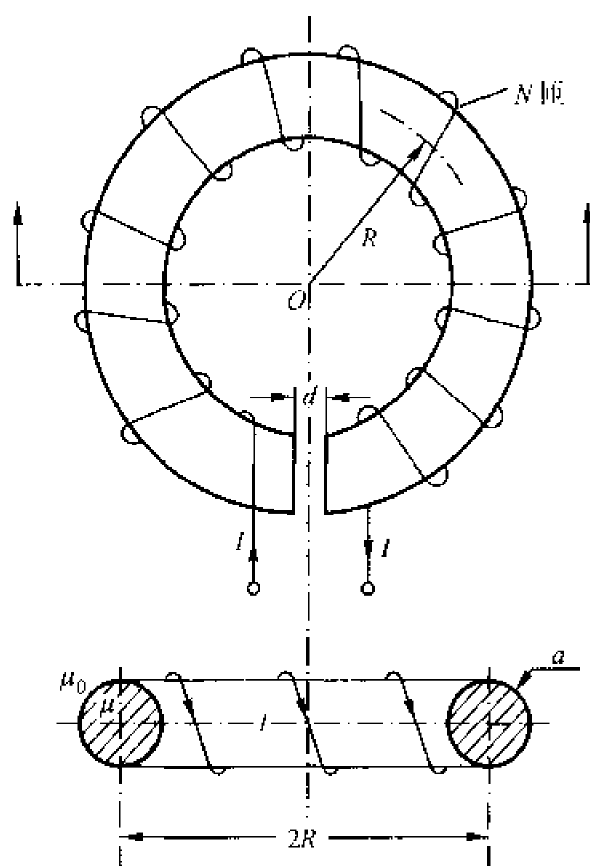



图 3-31 含气隙的环形铁心线圈

即
$$H_\delta d + H(2\pi R - d) = NI$$
代入式(3-91),整理之,解得铁心中

$$\boldsymbol{H} = \frac{NI}{\mu_r d + (2\pi R - d)}\boldsymbol{e}_\phi$$

气隙中的磁场强度为

$$H_\delta = \frac{\mu}{\mu_0}H = \frac{\mu_r NI}{\mu_r d + (2\pi R - d)}$$

其方向垂直于气隙处的铁心端面。

铁心和气隙处的磁感应强度则为

$$B = B_\delta = \frac{\mu NI}{\mu_r d + (2\pi R - d)}$$

由本例可见,在铁心中,因 $\mu \gg \mu_0(\mu_r \gg 1)$, $\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi_m \approx 0$,故工程分析中往往将铁磁媒质近似看作一等磁位体,而令磁压降集中体现于铁心的气隙处。

(2) 边值问题

对于恒定磁场,通常以矢量磁位 **A** 或标量磁位 $\varphi_m$ 为待求量,构造对应的边值问题,然后由边值问题的解答再续求磁感应强度与磁场强度的分布。

由矢量磁位 **A** 的泛定方程[式(3-44)或(3-45)]与相应定解条件构成的

边值问题，将结合 4.5 节的讨论予以阐述。这里，以标量磁位 $\varphi_m$ 的边值问题为例，进一步巩固 2.5 节已给出的方法运用的基础。

**例 3-16** 在均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，放置一个横截面半径为 $a$，磁导率为 $\mu$ 的长直圆柱体，如图 3-32 所示。求圆柱体内外的磁场。

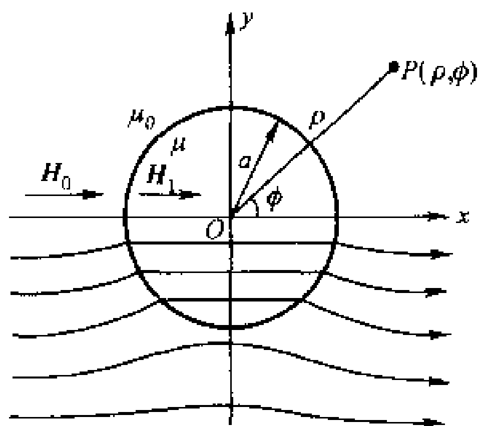



图 3-32 均匀外磁场中的长直圆柱磁体

**[解]** 对于本例轴向中间区段磁场的分析，可理想化为平行平面场问题。根据圆柱体界面形状，采用圆柱坐标系，且令 $z$ 轴与柱轴重合，外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向与 $x$ 轴同向。

类比于例 2-14，以标量磁位 $\varphi_m$ 为待求量所构造的边值问题如下：

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi_{m1}(\rho,\phi)=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\varphi_{m1}}{\partial\phi^2}=0 & (0\leqslant\rho<a)\\
\nabla^2\varphi_{m2}(\rho,\phi)=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\varphi_{m2}}{\partial\phi^2}=0 & (\rho>a)\\
\varphi_{m1}=0 & (\rho=0)\\
\varphi_{m2}=-H_0\rho\cos\phi & (\rho\to\infty)\\
\left.\begin{aligned}&\varphi_{m1}=\varphi_{m2}\\&\mu\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\rho}=\mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial\rho}\end{aligned}\right\} & (\rho=a)
\end{cases}
$$

显然，应用类比法，参照式(2-201)、(2-102)和式(2-103)，即得圆柱体内外的标量磁位分别为：

$$
\varphi_{m1}=-\frac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}H_0\rho\cos\phi=-\frac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}H_0x\qquad(\rho\leqslant a)
$$

和

$$
\varphi_{m2}=-\left(1-\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\cdot\frac{a^2}{\rho^2}\right)H_0\rho\cos\phi\qquad(\rho\geqslant a)
$$

圆柱内外的磁场强度分别为：

$$
\boldsymbol{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial x}\boldsymbol{e}_x=\frac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}H_0\boldsymbol{e}_x\tag{3-92}
$$

和

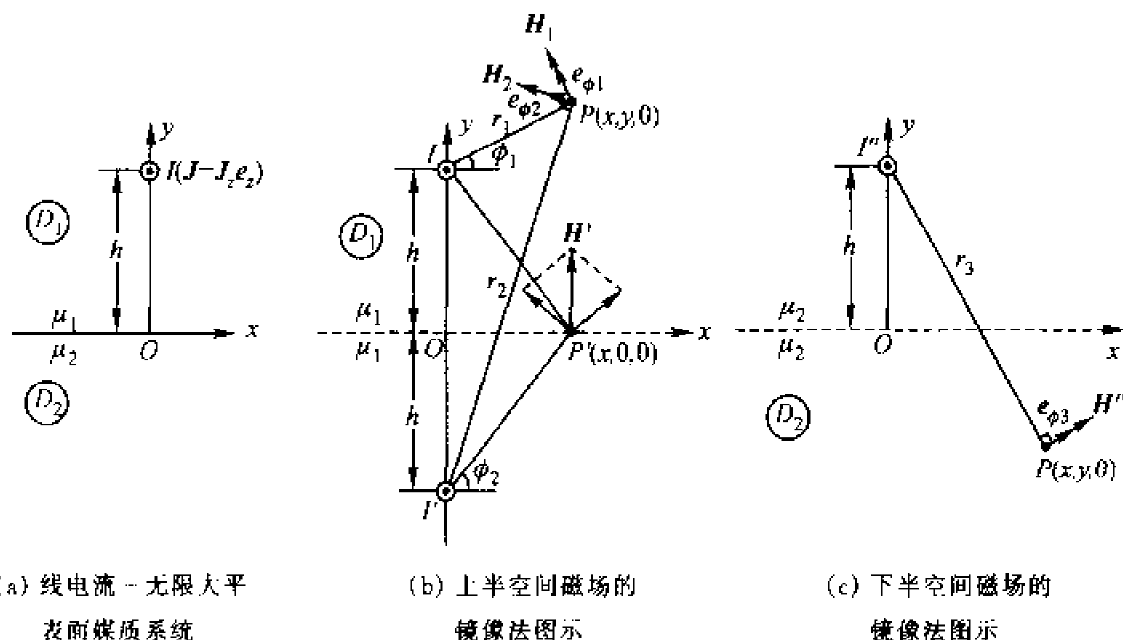
$$
\boldsymbol{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\rho\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi
$$

$$= \left(1 - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \cdot \frac{a^2}{\rho^2}\right) H_0 \cos \phi \, \boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \cdot \frac{a^2}{\rho^2} - 1\right) H_0 \sin \phi \, \boldsymbol{e}_\phi$$

由式(3－92)可见，圆柱体内磁场均匀，且有与外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 一致的方向，此时，圆柱磁体被均匀磁化。在图 3－32 的下半部，描绘了当 $\mu > \mu_0$ 时场中 $\boldsymbol{B}$ 线的分布图。

(3) 镜像法

类比于静电场中的镜像法，现讨论一根载流为 $I$ 的无限长直导线，平行放置在由两种媒质(磁导率分别为 $\mu_1$ 和 $\mu_2$)形成的无限大平面形的界面附近，如图 3－33(a)所示。求解两种媒质中的磁场。




(a) 线电流－无限大平表面媒质系统　(b) 上半空间磁场的镜像法图示　(c) 下半空间磁场的镜像法图示

图 3－33　磁场中镜像法的应用

显然，所求磁场为平行平面磁场。运用类比法，可以列出具有平行平面场特征的磁场与电场之间的对应相似关系，如表 3－2 所示。这样，按图 3－33(b)和

**表 3－2　相似的微分方程、关系式、物理量与参数**

| 平行平面磁场 | 平行平面静电场 |
|---|---|
| $\nabla^2 A_z = -\mu J_z$ | $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ |
| 分界面上边界条件：$A_{z1} = A_{z2}$ | $\varphi_1 = \varphi_2$ |
| $\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{z1}}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{z2}}{\partial n}$ | $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ |
| $A_z$ | $\varphi$ |
| $J_z$ | $\rho$ |
| $1/\mu$ | $\varepsilon$ |
| $I = \int_S J_z \mathrm{d}S$ | $\tau = \int_S \rho \mathrm{d}S, \quad q = \tau l$ |

(c)所示的镜像法原理,在设定与原电流 $I$ 的方向相同的镜像电流 $I'$ 和 $I''$ 的正方向后,由表 3-2,根据与 2.6.4 节中式(2-110)的类比关系,即可得:

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \tag{3-93}$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \tag{3-94}$$

可以看出,在规定 $I'$ 和 $I''$ 的正方向与 $I$ 的方向相同的前提下,$I''$ 总是正的,即其实际方向总和 $I$ 的方向一致;但 $I'$ 的方向需视($\mu_2 - \mu_1$)的正负而定。

**例 3-17** 设一根载流为 $I$ 的无限长直导线平行放置在平表面的无限大铁磁媒质($\mu \to \infty$)上方,如图 3-33(a)所示。导线与平面间距离为 $h$。试求在空气和铁磁媒质中的磁场。

**[解]** 本例为平行平面磁场。按图 3-33(a)所示,由题意可知,$\mu_1 = \mu_0$ 为空气,$\mu_2 \to \infty$。应用镜像法,对于上半空间($D_1$ 域)的磁场,可归结为图 3-33(b)所示均匀媒质 $\mu_0$ 中两线电流 $I$ 和 $I'$ 的合成磁场的分析;对于下半空间($D_2$ 域)的磁场可归结为图 3-33(c)所示均匀铁磁媒质 $\mu_2$ 中线电流 $I''$ 磁场的分析。而待定的两镜像电流 $I'$ 和 $I''$ 的量值则由式(3-93)、(3-94)给出,即 $I' \approx I$; $I'' \approx 0$。

(1) 上半空间(空气)中的磁场:此时,如图 3-33(b)所示,可归结为由一对量值相等、方向相同的线电流所产生的合成磁场,其任一场点 $P$ 处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi r_1}\boldsymbol{e}_{\phi 1} + \frac{I}{2\pi r_2}\boldsymbol{e}_{\phi 2}$$

式中距离 $r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$; $r_2 = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$; 且参见附录一中单位矢量的转换关系式,可知:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{\phi 1} = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi_1 + \boldsymbol{e}_y \cos\phi_1 \\ \boldsymbol{e}_{\phi 2} = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi_2 + \boldsymbol{e}_y \cos\phi_2 \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} \sin\phi_1 = \dfrac{y-h}{r_1};\ \cos\phi_1 = \dfrac{x}{r_1} \\ \sin\phi_2 = \dfrac{y+h}{r_2};\ \cos\phi_2 = \dfrac{x}{r_2} \end{cases}$$

因此,合成磁场为

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi}\left[-\left(\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} + \frac{y+h}{x^2+(y+h)^2}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{x}{x^2+(y-h)^2} + \frac{x}{x^2+(y+h)^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right]$$

应注意，在边界上($y=0$)，任一点 $P'$ 处的磁场强度

$$\boldsymbol{H}' = \frac{Ix}{\pi(x^2+h^2)}\boldsymbol{e}_y$$

所得结果再次表明磁场线垂直于铁磁媒质的表面。

(2) 下半空间(铁磁媒质)中的磁场：此时，如图 3-33(c)所示，可归结为由镜像电流 $I''$ 在均匀铁磁媒质中产生的磁场。显然，因 $I''\approx 0$，故铁磁媒质中磁场强度 $\boldsymbol{H}''\approx 0$。但是，磁通连续，所以铁磁媒质中 $\boldsymbol{B}''$ 绝不可能略而不计，其值是

$$\boldsymbol{B}'' = \mu_2\boldsymbol{H}'' = \mu_2\frac{I''}{2\pi r_3}\boldsymbol{e}_{\phi 3}$$

$$= \mu_2\frac{2\mu_0}{\mu_2+\mu_0}\cdot\frac{I}{2\pi r_3}\boldsymbol{e}_{\phi 3} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi r_3}\boldsymbol{e}_{\phi 3}$$

综合以上解答，可以定性地描绘本例的场图，即场中 $\boldsymbol{B}$ 线分布的示意图，如图 3-34 所示。

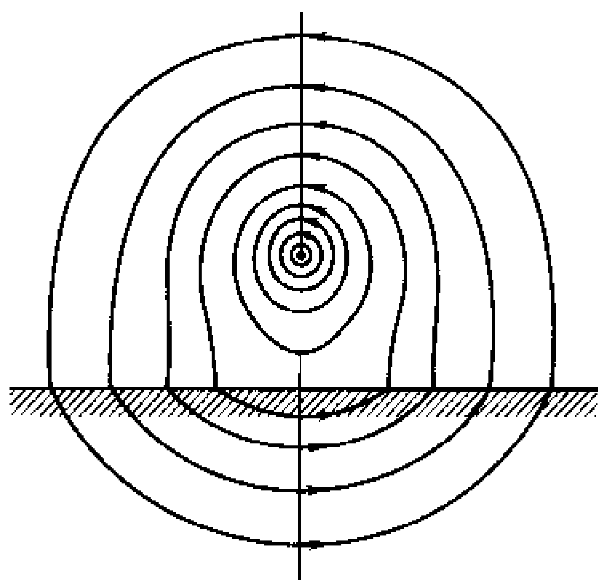


图 3-34　线电流—无限大铁磁平面系统的磁场

## 3.6　电感

由电磁学、电路理论已知，描述一个电路或两个相邻电路间因电流变化而感生电动势效应的物理参数，分别是自感系数 $L$ 和互感系数 $M$，它们统称为电感。与电容、电阻参数的计算相同，同样须运用场的观点，在相应的场分布分析的基础上，才能计算出实际电磁系统的电感参数。

## 3.6.1 自 感

载有电流 $I$ 的线圈，其各匝交链的磁通的总和称为磁链 $\Psi$（亦称自感磁链）。显然，若 $N$ 匝的线圈，各匝磁通均等于 $\Phi$，则其磁链 $\Psi = N\Phi$。然而，实际上线圈各匝所交链的磁通往往并不相同，如图 3 - 35 所示。这时，存在"部分交链"的情况，从而线圈的总磁链应表示为相应线匝磁链的总和，即 $\Psi = \sum N_i\Phi_i$。

在线性媒质中，线圈的自感磁链 $\Psi$ 与其励磁电流 $I$ 成正比，该比值定义为线圈的静态自感系数（简称自感）$L$，即

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad （单位：H） \tag{3-95}$$

若场中含有铁磁媒质，则媒质非线性的磁特性，决定了 $\Psi$ 和 $I$ 之间的非线性关系，此时，定义磁链的增量 $\mathrm{d}\Psi$ 对电流量 $\mathrm{d}I$ 的比值为动态自感 $L_d$，即 $L_d = \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}I$。显然，本节在恒定磁场分布基础上，对应于线性媒质的讨论，静态与动态自感是同一的决定于线圈几何形状、尺寸，以及媒质磁导率的物理参数。

当载流导体截面较大时，通常又将自感磁链 $\Psi$ 分为内磁链 $\Psi_i$ 和外磁链 $\Psi_o$ 两部分之和，以分别对应于如图 3 - 36 所示的不同的磁通与线匝交链的情况。可以看出，完全在载流导体外部闭合的磁通（如典型的由一束磁场线所组成的元磁感应管 $a$），合成为外磁链 $\Psi_o$；而由元磁感应管 $b$ 描述的则为与部分电流 $I'$ 交链的内磁通 $\mathrm{d}\Phi$。对于这类部分交链的情况，容易理解，这时线匝数以载流 $I$ 为基数（设为 1），则 $I'$ 应计为分数匝，其值为 $I'/I$。于是相应的元磁链 $\mathrm{d}\Psi = (I'/I)\mathrm{d}\Phi$，而内磁链

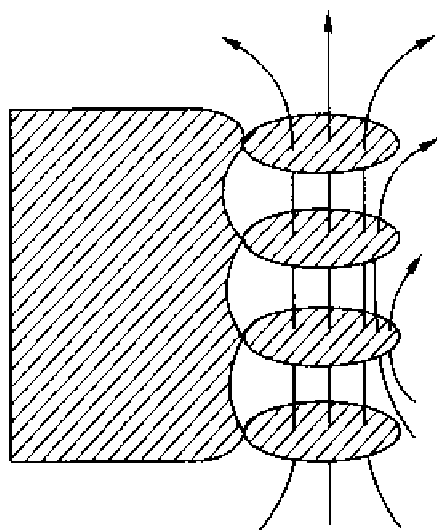


图 3 - 35 磁通与线匝交链的示意图

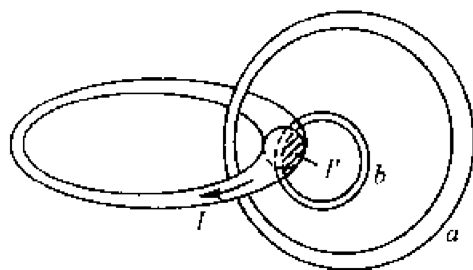



图 3 - 36 内、外磁链区分的示意图

$$\Psi_i = \int_S \frac{I'}{I} d\Phi \tag{3-96}$$

注意到,若令 $I' = I$,则上式即转换为外磁链 $\Psi_o$ 的计算关系式。

对应于内、外磁链的分析方法,由式(3-95)自感 $L$ 也就可表示为内自感 $L_i$ 与外自感 $L_o$ 之和,即

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_i + \Psi_o}{I} = \frac{\Psi_i}{I} + \frac{\Psi_o}{I} = L_i + L_o \tag{3-97}$$

**例 3-18** 计算图 3-37 所示同轴电缆(图示为电缆的横截面)的自感,设其外壳厚度可予忽略。

[**解**] 设电缆中电流为 $I$,且其长度 $l$ 远大于内、外导体半径 $a$ 和 $b$,故对中间区段场的分析,可看作平行平面场问题,且具有圆柱对称特征。

(1) 绝缘层中的外磁链 $\Psi_o$

根据安培环路定律,在绝缘层中,距轴线为 $\rho$ 的场点上的磁场强度 $H_o = \dfrac{I}{2\pi\rho}$。

现取轴向长度为 $l$、宽为 $d\rho$ 的面积元 $dS$,则通过该面积元与电流 $I$ 全交链的元磁通

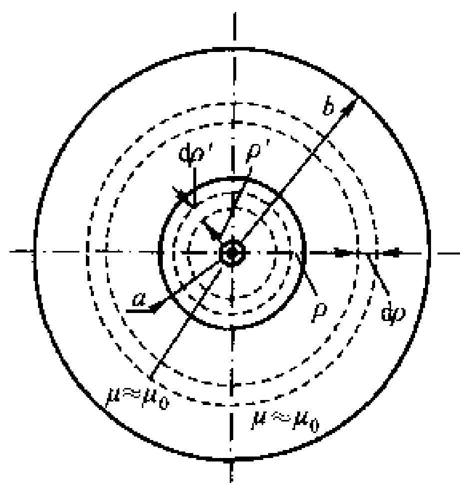



图 3-37 同轴电缆的自感

$$d\Phi_o = \boldsymbol{B}_o \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 H_o dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

这一元磁通与全部电流交链一次,故外磁链

$$\Psi_o = \int d\Psi_o = \int d\Phi_o = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(2) 缆芯中的内磁链 $\Psi_i$

根据安培环路定律可知,在距轴线为 $\rho'$ 的场点上的磁场强度 $H_i = \dfrac{I}{2\pi\rho'} \dfrac{\pi\rho'^2}{\pi a^2} = \dfrac{I\rho'}{2\pi a^2}$。同前理,通过面元 $dS' = l d\rho'$ 与部分电流 $I' = \dfrac{\pi\rho'^2}{\pi a^2} I$ 交链的元磁链

$$d\Psi_i = \frac{\pi\rho'^2}{\pi a^2} d\Phi_i = \frac{\rho'^2}{a^2} \cdot \frac{\mu_0 I\rho'}{2\pi a^2} l d\rho'$$

于是内磁链

$$\Psi_i = \int d\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 I l}{2\pi a^4}\rho'^3 d\rho' = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

综合以上结果，可得同轴电缆的自感为

$$L = \frac{\Psi_i + \Psi_o}{I} = L_i + L_o = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] \tag{3-98}$$

值得注意，内自感 $L_i$ 仅与圆导体的长度有关，而与半径无关。

**例 3－19** 计算图 3－38 所示两线传输线的自感。

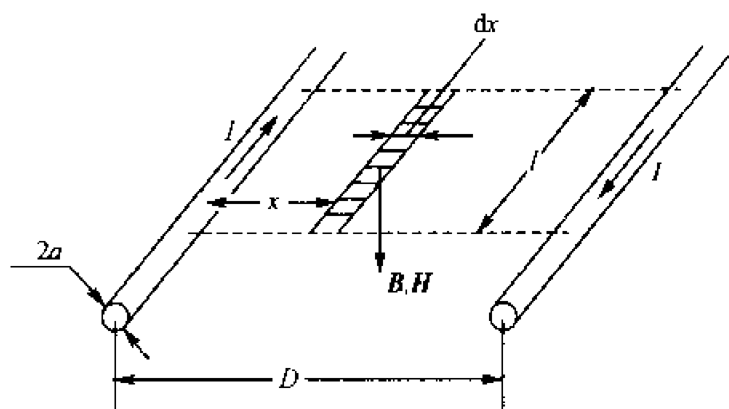



图 3－38 两线传输线的自感

**［解］** 设导线由非铁磁材料制成，且其长度 $l$ 远大于线径 $a$ 和线间距 $D$。同理，在中间区段场为平行平面场的前提下，由于电流均匀分布，在计算外磁链时，可认为电流集中在传输线的几何轴线上。这样，在距左侧导线轴 $x$ 处的磁场强度

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(D-x)}$$

其方向如图示。因此，穿越面积元 $dS = l dx$ 的元磁通 $d\Phi = \mu_0 H l dx$，而外磁链

$$\Psi_o = \int d\Psi_o = \int d\Phi$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)dx$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi}\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)$$

故外自感

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)$$

通常，因有 $D \gg R$，可进一步简化为

$$L_o \approx \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\left(\frac{D}{a}\right)$$

基于例 3－18 关于内自感 $L_i$ 的分析，可知两线传输线的内自感为

$$L_i = 2 \times \frac{\mu_0 l}{8\pi} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

由此得两线传输线的自感为

$$L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\left(\frac{D}{a}\right) = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{D}{a}\right)\right] \qquad (3-99)$$

### 3.6.2 互　　感

在线性媒质中，如果一个线圈 $k$ 的磁链是由另一线圈 $h$ 中的电流 $I_h$ 所产生，记为互感磁链 $\Psi_{kh}$，则 $\Psi_{kh}$ 与电流 $I_h$ 的比值定义为线圈 $h$ 对线圈 $k$ 的静态互感系数（简称互感）$M_{kh}$，即

$$M_{kh} = \frac{\Psi_{kh}}{I_h} \quad (单位:H) \qquad (3-100)$$

同理，线圈 $k$ 对线圈 $h$ 的互感可表示为

$$M_{hk} = \frac{\Psi_{hk}}{I_k} \quad (单位:H) \qquad (3-101)$$

可以证明

$$M_{kh} = M_{hk} \qquad (3-102)$$

在非线性媒质中，则定义增量 $d\Psi_{kh}$ 对 $dI_h$ 的比值 $d\Psi_{kh}/dI_h$ 为动态互感。同样，在本节讨论的线性媒质条件下，静态与动态互感是同一的决定于两线圈形状、尺寸，媒质的磁导率，并与两线圈间的相互位置有关的物理参数。

**例 3－20** 计算图 3－39 所示两对输电线间的互感。

**[解]** 设两对输电线各自的线间距，以及两者之间的距离 $D_{AC}$、$D_{AD}$、$D_{BC}$ 和 $D_{BD}$ 均远大于导线半径，故电流对外作用中心即可认为与导线的几何轴线相重。这样，若输电线 AB（回路 1）通有电流 $I$，可根据叠加原理分别先求载流导线 A 和 B 在输电线 CD（回路 2）中产生的互感磁链 $\Psi_{MA}$ 和 $\Psi_{MB}$，然后再由两者之总和得出互感磁链 $\Psi_M$。

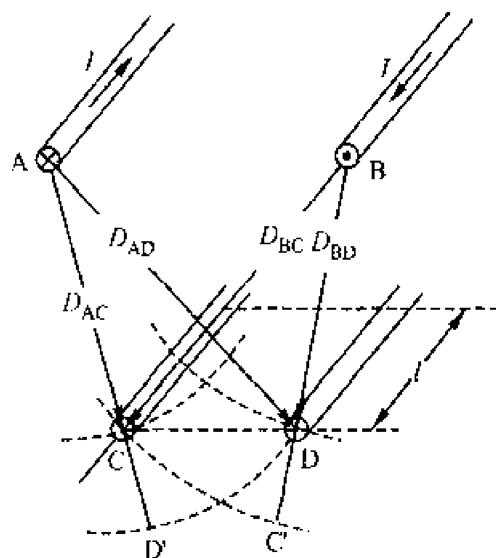


图 3－39　两对传输线间的互感

在计算互感磁通 $\Phi_{MA}$ 时，由磁通连续性原理可知，穿过面积 $S(=l\cdot CD)$ 的磁通

等于穿过面积 $S'(=l\cdot CD')$ 的磁通，即

$$\Phi_{MA}=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S'}B\mathrm{d}S'=\int_{D_{AC}}^{D_{AD'}}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}l\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{D_{AD'}}{D_{AC}}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{D_{AD}}{D_{AC}}\right)$$

因而

$$\Psi_{MA}=\Phi_{MA}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{D_{AD}}{D_{AC}}\right)$$

同理可得

$$\Psi_{MB}=\Phi_{MB}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{D_{BC}}{D_{BD}}\right)$$

对于输电线 CD，由于以上两部分磁通互相增助，故总的互感磁链为

$$\Psi_M=\Psi_{MA}+\Psi_{MB}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{D_{AD}D_{BC}}{D_{AC}D_{BD}}\right)$$

从而得互感为

$$M=\frac{\Psi_M}{I}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{D_{AD}D_{BC}}{D_{AC}D_{BD}}\right)$$

### 3.6.3 线形回路的电感

前已基于场量 **B**、**H** 计算了一些典型载流回路的电感参数。然而，对截面积不可忽略的导线所组成的各种实际复杂回路电感的计算，其一般分析方法的基础是线形回路(指载流导线截面可予忽略的线电流构成的回路)电感的计算。以下讨论由此给出的计算电感的一般公式。

对于线形回路的自感磁链的计算，如图 3-40所示，采用矢量磁位 **A**，应取该线形回路的内周界 $l'$ 为积分路径，求与线电流 $I$ 全交链的外磁链，而线电流 $I$ 则被看作集中在回路的轴线上流动。于是得外磁链

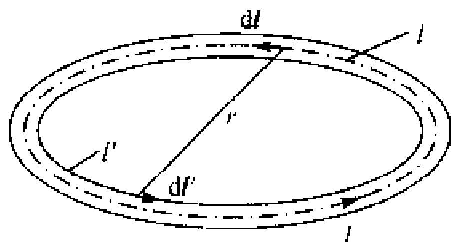



图 3-40 线形回路外磁链的计算用图

$$\Psi_o=\Phi_o=\oint_{l'}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'}\oint_{l}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{r}$$

外自感即为

$$L_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C}\oint_{l}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{r} \tag{3-103}$$

对于由 $N$ 匝细导线紧密绕制的线圈，因其通过电流 $I$ 时产生的磁通可近似地认为是单匝电流 $I$ 所产生的磁通的 $N$ 倍，而该磁通又与全部匝数相交链，故外自感为

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{N\Phi_o}{I} = \frac{N^2\mu_0}{4\pi}\oint_{C}\oint_{l}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{r} \tag{3-104}$$

可见，外自感 $L_o$ 与线匝数 $N$ 的平方成正比。

至于内自感，一般均采用近似计算法。对于圆截面导线，不论回路形状如何，如该回路任何部位的曲率半径都远大于横截面半径时，则其内自感计算可等同于无限长直导线的情况(例 3－18)，即周长为 $l$ 的电流回路的内自感为

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \tag{3-105}$$

通常线形回路的内自感远小于外自感，所以其自感为

$$L = L_i + L_o \approx L_o$$

对于两个线形电流回路之间的互感，如图 3－41 所示，回路 2 中电流 $I_2$ 在回路 1 轴线上任一点 $P$ 处产生的矢量磁位为

$$\boldsymbol{A}_P = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r}$$

故由回路 2 中电流 $I_2$ 产生而与回路 1 相交链的互感磁链为

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} = \oint_{l_1}\boldsymbol{A}_P\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r}$$

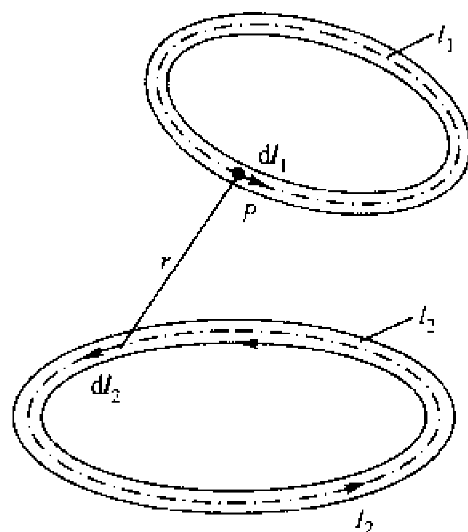



图 3－41　两线形回路间互感的计算

于是回路 2 对回路 1 的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r} \tag{3-106}$$

同理可得

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r} \tag{3-107}$$

由式(3－106)和(3－107)可见

$$M_{12} = M_{21}$$

与式(3-102)的结论相一致。

若回路1、2分别由 $N_1$ 和 $N_2$ 匝细导线紧密绕制而成，则互感为

$$M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r} \tag{3-108}$$

式中 $l_1$、$l_2$ 分别表示回路1、2一匝的周长。

以上式(3-106)、(3-108)和(3-103)、(3-104)分别为计算线性媒质中线形回路电感(互感和外自感)的一般公式，称为诺以曼公式。

**例 3-21** 一铜制圆环的圆形横截面半径 $a = 1$ cm，环的平均半径 $R = 10$ cm，如图 3-42 所示。求圆环的自感。

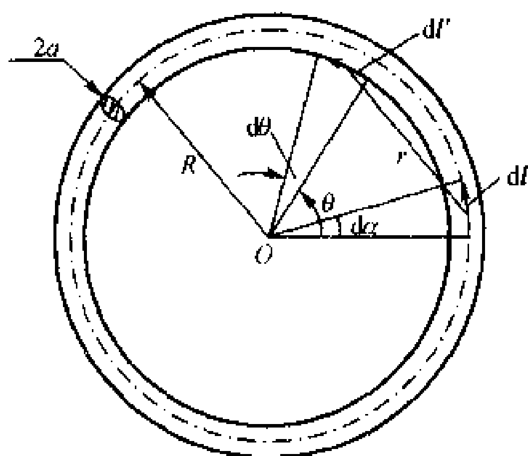



图 3-42 具有圆截面的圆环的电感

**[解]** 圆环的内自感 $L_i$ 可由式(3-105)计算得

$$L_i = \frac{\mu_0 2\pi R}{8\pi} = \frac{\mu_0 R}{4}$$
$$= \pi \times 10^{-7} \times 10 \times 10^{-2}\ \mathrm{H}$$
$$= 3.142 \times 10^{-8}\ \mathrm{H}$$

为求圆环的外自感 $L_o$，可在图 3-42 中圆环的轴线上取 $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\alpha$，在环的内圆周上取 $\mathrm{d}l' = (R-a)\mathrm{d}\theta$，然后，由两长度元间的距离 $r = \sqrt{R^2 + (R-a)^2 - 2R(R-a)\cos\theta}$，根据式(3-103)可得

$$L_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint \frac{\cos\theta \mathrm{d}l \mathrm{d}l'}{r}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R(R-a)\cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\alpha}{\sqrt{R^2 + (R-a)^2 - 2R(R-a)\cos\theta}}$$
$$= 90.0 \times 10^{-9} \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\alpha}{\sqrt{181 - 180\cos\theta}}$$
$$= 5.655 \times 10^{-7} \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{181 - 180\cos\theta}}$$

应用数值积分方法[18]，由计算机可算得上式结果为

$$L_o = 2.787 \times 10^{-7}\ \mathrm{H}$$

故圆环的自感为

$$L = L_i + L_o = 3.101 \times 10^{-7}\ \mathrm{H}$$

若采用以上积分关系式的近似算式[13]，则有

$$L = \mu_0 R\left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - 1.75\right]$$
$$= 3.31 \times 10^{-7}\ \text{H}$$

# 3.7 磁场能量

磁场作用于载流导体或运动电荷的电磁力作功，是磁场具有能量的表征。工程上，广泛应用电流建立的磁场，因此，本节将首先导出载流回路系统磁场能量的计算公式，然后，从更一般的意义上讨论了储存于磁场空间中的磁场能量的分布，并给出了磁场能量分布密度的计算式。

## 3.7.1 载流回路系统中的磁场能量

首先，讨论单个载流回路的磁场能量。设回路电流从零开始缓慢地增长到终值 $I$，因而回路磁通链也由零值逐渐缓慢地增加到终值，并引起感应电动势 $e = -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 阻碍电流的增长。因此，外电源必须克服该感应电动势作功，对应于 $\mathrm{d}t$ 时间间隔，电源作功 $\mathrm{d}W = ui\mathrm{d}t$。假如电源在建立该回路电流 $i$ 的过程中没有其他能量损失，如无机械能、焦耳热损耗，并因已设建立过程足够缓慢，故亦无涡流损耗或电磁辐射损失。这样，$u = \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$，而且电源所作的功将全部转换为磁场储存的能量，即

$$\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}W = i\mathrm{d}\Psi = iL\mathrm{d}i \tag{3-109}$$

于是，在线性媒质中，当回路电流增至终值 $I$ 时，单个载流回路的磁场能量为

$$W_m = \int \mathrm{d}W_m = \int_0^I iL\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2 \tag{3-110}$$

应指出，根据上式，若已知单个载流回路的电流及其磁场能量，则即可方便地计算该回路的自感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \tag{3-111}$$

考虑到单回路电感 $L = \Psi/I$，故式(3-110)又可表示为

$$W_m = \frac{1}{2}\Psi I \tag{3-112}$$

式中 $\Psi$ 为电流 $I$ 与回路相互交链的磁通链。

对于由 $n$ 个载流回路系统建立的磁场，类比于 2.8 节静电能量的分析，可设想这样一种磁场的建立过程：令各个回路电流均按同一比例由零值缓慢地增

长到终值，该增长的比例系数为 $m(0\leqslant m\leqslant 1)$。由此可知，在磁场建立过程中的某一时刻，各回路电流 $i_k(t)=m(t)I_k$，式中 $I_k$ 为 $k$ 号载流回路电流的终值。由于媒质线性，决定了各回路中磁链和电流间的线性关系，故对应于该时刻 $t$，与回路交链的磁链 $\Psi_k(t)=m(t)\Psi_k$。这样，由式(3-109)知，在 $dt$ 时间间隔内，外源在 $n$ 个载流回路中作功为

$$\begin{aligned} dW_m = dW &= \sum_{k=1}^{n} i_k(t)\, d\Psi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} mI_k d(m\Psi_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} mI_k\Psi_k dm \end{aligned}$$

当各回路电流均达到终值($m=1$)时，外源所作的总功，即该 $n$ 个载流回路系统的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m = \int dW_m &= \sum_{k=1}^{n} I_k\Psi_k \int_0^1 m\,dm \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Psi_k \end{aligned} \tag{3-113}$$

注意到，在线性媒质中，以 $k$ 号载流回路为例，其磁链 $\Psi_k$ 可表示为自感磁链和互感磁链之和，即

$$\begin{aligned} \Psi_k &= (\Psi_L)_k + (\Psi_M)_k = L_kI_k + M_{k1}I_1 + M_{k2}I_2 + \cdots + M_{kn}I_n \\ &= L_kI_k + \sum_{\substack{h=1 \\ (h\neq k)}}^{n} M_{kh}I_h \end{aligned} \tag{3-114}$$

将上式代入式(3-113)，于是 $n$ 个载流回路系统的磁场能量还可通过系统的电感参数表示成

$$\begin{aligned} W_m &= \left(\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}L_nI_n^2\right) + \\ &\quad (M_{12}I_1I_2 + M_{13}I_1I_3 + \cdots + M_{(n-1)n}I_{n-1}I_n) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_kI_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{h=1 \\ (h\neq k)}}^{n} M_{kh}I_kI_h \end{aligned} \tag{3-115}$$

式中已应用了 $M_{kh}=M_{hk}$。式(3-115)的第一部分为各载流回路的固有能之总和；第二部分为各相关载流回路间的相互作用能。

根据式(3-48)，若各载流回路均设为单匝线形载流回路，则以 $k$ 号回路为例，其磁链

$$\Psi_k = \oint_{l_k} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_k$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是各回路电流在 $k$ 号回路长度元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_k$ 处产生的合成矢量磁位。将上式代入式(3-113),即得 $n$ 个线形载流回路系统的磁场能量为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \oint_{l_k} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_k \tag{3-116}$$

若载流回路中为体电流分布,则由元电流 $I_k \mathrm{d}\boldsymbol{l}_k = \boldsymbol{J}\mathrm{d}V$,并在电流所在体积 $V_k$ 中积分。然后,再将式(3-116)中的和式化为体积分,并进一步扩展积分域至整个场空间。这样,$n$ 个载流回路系统的磁场能量也可用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{3-117}$$

### 3.7.2 磁场能量的分布及其分布密度

3.7.1 节以与载流回路相关的电磁量,如电流、磁链、电感以及回路处的矢量磁位,给出了关于磁场能量的各计算公式。基于能量是场的物质性的基本属性之一,可以确认,磁场能量应分布在整个场域空间,从而也就可以通过能量分布密度的体积分来计算磁场能量。

已知 $\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{H}$,代入式(3-117),可得

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})\mathrm{d}V \tag{3-118}$$

应用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$ 及散度定理,式(3-118)为

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\oint_S (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}\mathrm{d}V \end{aligned}$$

式中 $S$ 为包围场空间 $V$ 的表面,可等同地看作位于无限远处的无限大球面。这样,因有 $H \propto \frac{1}{r^2}$,$A \propto \frac{1}{r}$,而面积 $S \propto r^2$,故当 $r \to \infty$ 时第一项积分应等于零。因而

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}\mathrm{d}V \tag{3-119}$$

上式积分遍及整个场空间 $V$。由此可见,磁场能量分布于整个磁场空间中,而式中的被积函数显然表征着磁场能量的分布密度,若记为 $w'_{\mathrm{m}}$,则

$$w'_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3-120}$$

对于各向同性的线性媒质，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，因此磁场能量密度可以表示为

$$w'_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \tag{3-121}$$

上式表明，由于磁场能量与磁场强度平方成正比，因此与电场能量一样，磁场能量也不符合叠加原理。

**例 3-22** 计算同轴电缆每单位长度内的磁场能量（参阅图 3-37）。设电缆载流为 $I$，内、外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，绝缘层为空气，且忽略不计外导体厚度。

［**解**］ 按题设，理想化为平行平面磁场问题。

解法一：基于电路参数的计算式(3-110)。

本例为一单回路的载流系统，由例 3-18 中式(3-98)已知，该同轴电缆单位长度的电感为

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

故按式(3-110)，可知单位长度内同轴电缆中磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

解法二：基于场分布的计算式(3-119)。

由内导体中的磁场强度

$$H_i = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

因而内导体中单位长度内的磁场能量为

$$W_{mi} = \int_V\left(\frac{1}{2}\mu_0 H_i^2\right)\mathrm{d}V = \int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I\rho}{2\pi a^2}\right)^2\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

又因内外导体之间的磁场强度

$$H_o = \frac{I}{2\pi\rho}$$

故内外导体之间单位长度内的磁场能量为

$$W_{mo} = \int_a^b\left(\frac{1}{2}\mu_0 H_o^2\right)2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

由此可得单位长度内同轴电缆的磁场能量为$(W_{mi}+W_{mo})$。显然两种方法所得结果完全相同。

## 3.8 磁场力

在第一章给出基本场矢量——磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义时已经指出，磁场作用于运动电荷的磁场力（洛伦兹力）$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$，以及磁场作用于元电流段 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的磁场力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$。由此可得磁场作用于载流回路 $l$ 的力为

$$\boldsymbol{F}=\oint_l I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{3-122}$$

如果磁场系由另一载流回路所激发，则根据毕奥－萨伐尔定律，将该回路电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 代入式(3－122)，即可得出两个任意形状载流回路之间的作用力。例如，如图3－43所示，载流回路 $l_1$ 中电流 $I_1$ 产生的磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 对于整个载

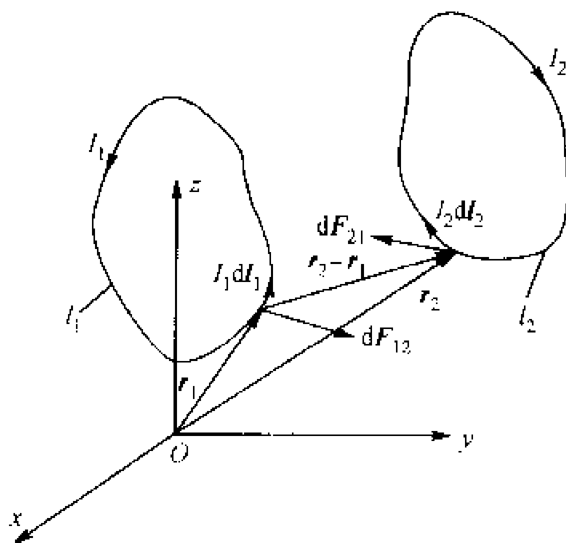



图3－43 两载流回路间的磁场力计算

流回路 $l_2$ 的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times[I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{3-123}$$

同理，可以求出回路电流 $I_2$ 产生的磁场 $\boldsymbol{B}_2$ 对于整个回路 $l_1$ 的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times[I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3} \tag{3-124}$$

式(3－123)和(3－124)称为安培力定律。容易证明，$\boldsymbol{F}_{21}=-\boldsymbol{F}_{12}$，符合牛顿定律。

事实上，无论是孤立的载流回路、载流回路之间、磁铁之间，以及电流与磁铁

间的磁场力计算问题，原则上，虽然均可归结为磁场作用于元电流的力，但由式(3－122)—(3－124)可见，计算涉及矢量积分式，通常难以求得严格的解析表达式。为此，如同电场力计算一样，应用虚位移法求磁场力，将在许多问题中可以简化计算。

类比于静电场中虚位移法的功能平衡方程(2－136)，对于恒定磁场的虚位移法，功能平衡方程可表示为

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}_g W_m + F\mathrm{d}g \tag{3-125}$$

式中 $\mathrm{d}W(=\sum I_k \mathrm{d}\Psi_k)$ 表示外源送入系统的能量；$\mathrm{d}_g W_m$ 为相应于某一广义坐标变化($\mathrm{d}g$)而引起系统的磁场能量的增量；$F\mathrm{d}g$ 则为在 $\mathrm{d}g$ 方向上，广义力(磁场力)所作的功。取决于系统设定的求解条件，虚位移法有以下两类磁场力计算关系式：

(1) 常电流系统：这时设定各回路中的电流保持不变，即 $I_k=$ 常量，从而根据式(3－113)，有

$$\mathrm{d}_g W_m \Big|_{I_k=\text{常量}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\Psi_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}W$$

这表明，外源提供的能量，有一半作为磁场能量的增量，另一半则用作机械功，即

$$F\mathrm{d}g = \mathrm{d}_g W_m \Big|_{I_k=\text{常量}}$$

由此可得广义力

$$F = \frac{\mathrm{d}_g W_m}{\mathrm{d}g}\Bigg|_{I_k=\text{常量}} = \frac{\partial W_m}{\partial g}\Bigg|_{I_k=\text{常量}} \tag{3-126}$$

(2) 常磁链系统：这时设定与各回路相交链的磁链保持不变，即 $\Psi_k=$ 常量；$\mathrm{d}\Psi_k=0$。因此 $\mathrm{d}W=0$，表明外源不提供能量。这样，根据式(3－125)，应有

$$F\mathrm{d}g = -\mathrm{d}_g W_m \Big|_{\Psi_k=\text{常量}}$$

从而得广义力

$$F = -\frac{\mathrm{d}_g W_m}{\mathrm{d}g}\Bigg|_{\Psi_k=\text{常量}} = -\frac{\partial W_m}{\partial g}\Bigg|_{\Psi_k=\text{常量}} \tag{3-127}$$

上式表明，磁场力作功所需能量取自于系统磁场能量的减少。

由于式(3－126)和(3－127)所求是对应于同一状态下的电流和磁链情况下的力，因此，必有

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial g}\Bigg|_{I_k=\text{常量}} = -\frac{\partial W_m}{\partial g}\Bigg|_{\Psi_k=\text{常量}}$$

应指出，实际问题中，有时只需求某一系统中的相互作用力，这时，只要写出该系统的相互作用能的表达式，然后按广义力公式通过对相应广义坐标求偏导，

即可得解。

**例 3-23** 分析两线输电线系统(图 3-38)中导线所受的作用力。

**[解]** 该系统为一单回路载流系统,由式(3-99)已知其电感为

$$L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\ln\left(\frac{D}{a}\right)\right]$$

故系统的磁场能量

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$

根据虚位移法,若取广义坐标为 $D$,则由式(3-126)应有

$$F_1=\left.\frac{\partial W_m}{\partial D}\right|_{I=C}=\frac{1}{2}I^2\frac{\partial L}{\partial D}=\frac{\mu_0 lI^2}{2\pi D}$$

根据广义力的假定正方向为广义坐标 $D$ 增加的方向,可见两导线在沿线间距 $D$ 扩展的方向上分别受到磁场力 $F_1$ 的作用,其结果是两载流导线相互推斥。

若取广义坐标为 $a$,则由

$$F_2=\left.\frac{\partial W_m}{\partial a}\right|_{I=C}=\frac{1}{2}I^2\frac{\partial L}{\partial a}=-\frac{\mu_0 lI^2}{2\pi a}$$

由此可见,导线表面同时还受到指向轴线中心的应力。

**例 3-24** 在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中,求如图 3-44 所示载流平面线圈所受的作用力矩。设线圈中的电流为 $I_1$,线圈的面积为 $S$,它的正法线方向与外磁场 $\boldsymbol{B}$ 间的夹角为 $\alpha$。

**[解]** 将均匀外磁场与载流线圈交链的互感磁链记作 $\Psi_{12}$,则所论载流系统的相互作用能为

$$W_{m12}=I_1\Psi_{12}=I_1BS\cos\alpha$$

因此,作用于载流线圈的作用力矩应为

$$T=\left.\frac{\partial W_{m12}}{\partial \alpha}\right|_{I_1=C}=-BI_1S\sin\alpha=-Bm\sin\alpha$$

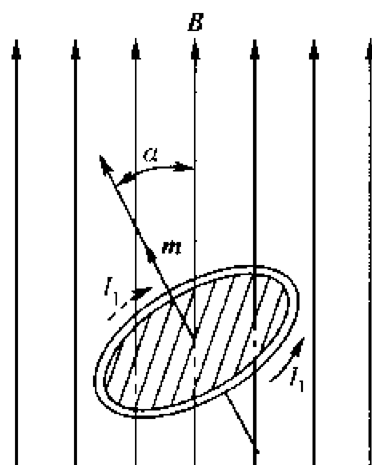


图 3-44 均匀外磁场中的载流线圈

式中,$m=I_1S$ 即为前已定义的载流回路的磁矩;负号表示该力矩的作用将力图减小夹角 $\alpha$。以矢量形式表示,上式可简化为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

若载流线圈中的电流 $I_1$ 反向(如图 3-44 中虚线所示),则其相互作用能为负值,由此得作用力矩为

$$T=\left.\frac{\partial W_{m12}}{\partial \alpha}\right|_{I_1=C}=Bm\sin\alpha$$

可见，此时该力矩的作用将力图增大夹角 $\alpha$。

综上所述，可总结载流回路在外磁场中受力矩作用，产生转动的运动规律是：务求该回路交链尽可能多的磁通。此外，以上分析完全适用于磁偶极子，因为磁偶极子所在范围内的外磁场可认为是均匀的。

按照法拉第观点，与电场相仿，磁场作用于载流回路的力或磁铁间的相互作用力是通过媒质传递的。磁场中每一磁感应强度管沿其轴线方向受到纵张力，而在垂直于轴线方向，则受到侧压力作用。纵张力和侧压力的量值相等，都等于 $BH/2=\mu H^2/2=B^2/2\mu$，单位是 $N/m^2$（牛/米$^2$）。同样，结合场图，有可能对磁场力分布作出简明的分析。

**例 3－25** 求图 3－45 所示电磁铁对衔铁的吸力。设铁心截面积为 $S$，空气隙长度为 $l$，并忽略空气隙处边缘效应，认为气隙中磁场均匀分布。

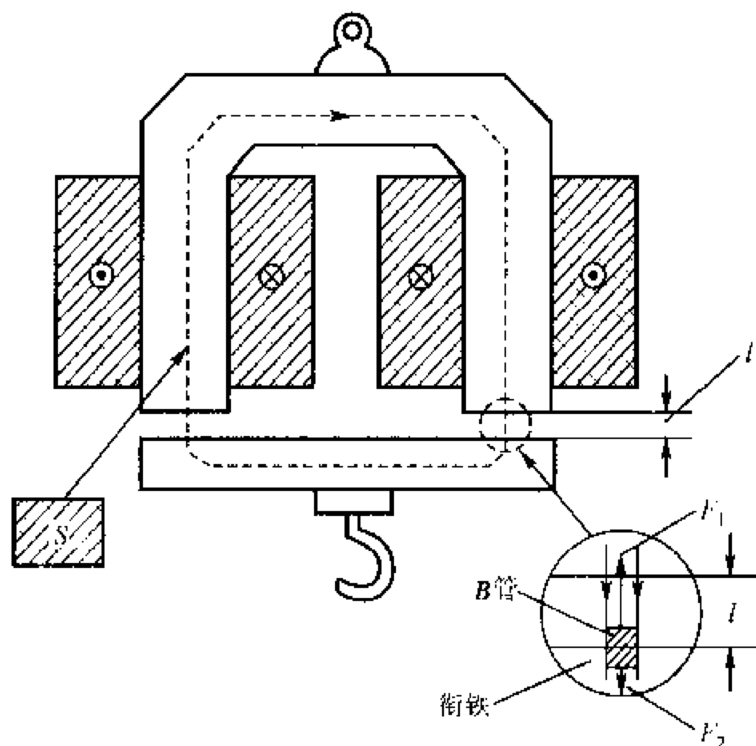



图 3－45 电磁铁的起重力

［**解**］ 解法一：应用法拉第观点求磁场力。

分析气隙处位于衔铁面上磁感应强度管的受力状况，设该管截面积为 $\Delta S$。显然，因气隙处磁场均匀，故侧压力 $F'=F''$，这表明该 **B** 管侧向受力平衡。已知铁心中 $H\approx0$，故衔铁内纵张力 $F_2\approx0$。令所取 **B** 管长度趋向于零，则纵张力 $F_1$ 即为作用于衔铁表面每单位面积上的磁场力，其值为

$$F_1=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\qquad（单位：N/m^2）$$

因而对每一磁极表面呈现的吸力为

$$F'_0 = SF_1 = \frac{B^2}{2\mu_0}S$$

总吸力即其起重力，显然为

$$F = 2F'_0 = \frac{B^2}{\mu_0}S$$

解法二：应用虚位移法。

基于工程分析观点，该电磁铁系统的磁场能量可近似等同于在两气隙处储存的磁场能量，即有

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2Sl = \frac{B^2}{\mu_0}Sl = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}l$$

从而由式(3 - 127)可知，改变气隙 $l$ 的广义力为

$$F = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial l}\right|_{\Phi=C} = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 S} = -\frac{B^2}{\mu_0}S$$

式中负号表示此力企图减小空气隙长度。也就是说，$F$ 是电磁铁作用于衔铁的吸力，即为其起重力。显然，所得结果与解法一的结果相同。

## 习　题

**3 - 1**　电导率为 $\gamma$ 的均匀、各向同性的导体球，其表面上的电位为 $\varphi_0\cos\theta$，其中 $\theta$ 是球坐标$(r,\theta,\phi)$的一个变量。试决定表面上各点的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

**3 - 2**　一长度为 1 m，内外导体的半径分别为 $R_1 = 5$ cm，$R_2 = 10$ cm 的圆柱形电容器，中间的非理想介质具有电导率 $\gamma = 10^{-9}$ S/m。若在两电极间加电压 $U_0 = 1000$ V，求：

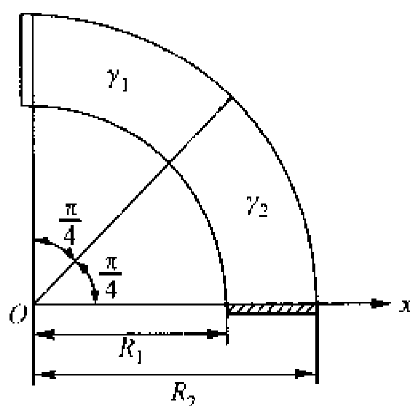
(1) 各点的电位、电场强度；

(2) 漏电导。

**3 - 3**　一导电弧片由两块不同电导率的薄片构成如题 3 - 3 图所示。若 $\gamma_1 = 6.5\times10^7$ S/m，$\gamma_2 = 1.2\times10^7$ S/m，$R_2 = 45$ cm，$R_1 = 30$ cm，钢片厚度为 2 mm，电极间电压 $U = 30$ V，且 $\gamma_{电极} \gg \gamma_1$ 求：

(1) 弧片内的电位分布（设 $x$ 轴上的电极为零电位）；

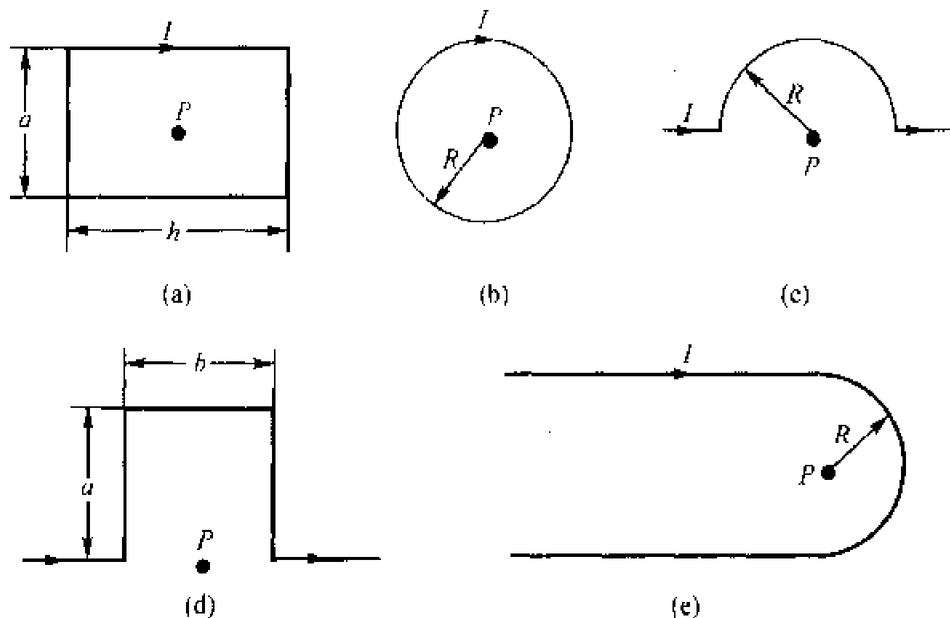
(2) 总电流 $I$ 和弧片电阻 $R$。




题 3 - 3 图

**3 - 4**　一个由钢条组成的接地体系统，已知其接地电阻为 100 Ω，土壤的电导率 $\gamma = 10^{-2}$ S/m。设有短路电流 500 A 从钢条流入地中，有人正以 0.6 m 的步距向此接地体系统前进，前足距钢条中心 2 m，试求跨步电压。（解题时，可将该接地体系统用一半球形接地器等效替代之。）

**3-5** 分别求题 3-5 图所示各种形状的线电流在真空中的 $P$ 点所产生的磁感应强度。



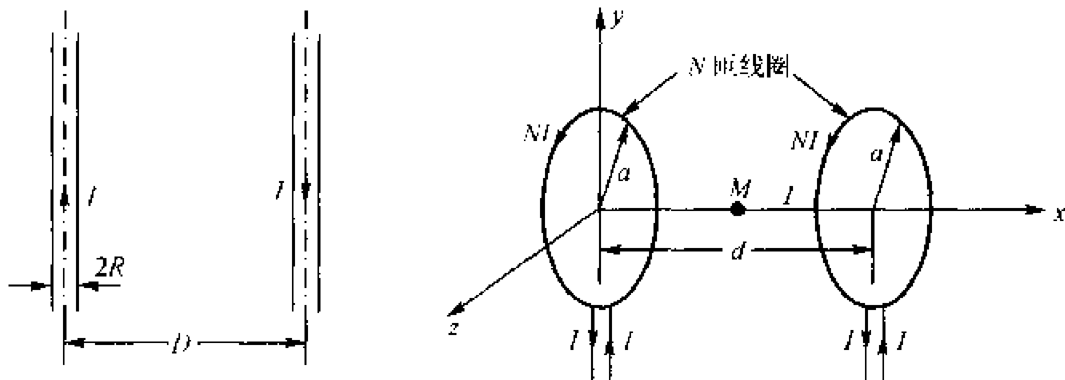

题 3-5 图

**3-6** 真空中两根平行长直导线的截面半径都为 $R$,轴线距离为 $D$,导线中电流为 $I$,如题 3-6 图所示。

(1) 试求在两导线的轴线平面上各处 $\boldsymbol{B}$ 的表达式;

(2) 若两导线的电流同方向,求 $\boldsymbol{B}$ 的表达式。

**3-7** 题 3-7 图所示为工程上的亥姆霍兹线圈,用以在其中心 $M\left(\frac{d}{2},0,0\right)$ 附近获得均匀的磁场区。设该两载有同向电流 $I$ 的各有 $N$ 匝的圆环线圈,半径均为 $a$,相距为 $d$。试求:




题 3-6 图　　　　题 3-7 图

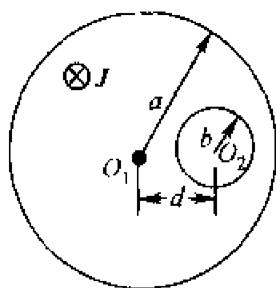
(1) 在两线圈轴线上任一场点 $P(x,0,0)$ 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_P$;

(2) 为获得均匀磁场区,设计中要求中点 $M$ 处 $|\boldsymbol{B}_P|$ 的二阶导数为零,试求此时几何尺寸 $a$ 和 $d$ 之间应满足的条件;

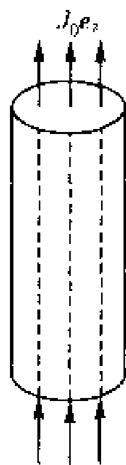
(3) 证明在中点 $M$ 处,$|\boldsymbol{B}_P|$ 将取得最大值。

**3-8** 真空中,一通有电流(电流密度为 $\boldsymbol{J}=J_0\boldsymbol{e}_x$),半径为 $a$ 的无限长圆柱内,有一半径

为 $b$ 不同轴的圆柱形空洞。两轴线间相距 $d$，如题 3－8 图所示。试证：小圆柱内的 $\boldsymbol{B}$ 均匀，且其值为 $\frac{\mu_0 J_0 d}{2}$。




题 3－8 图



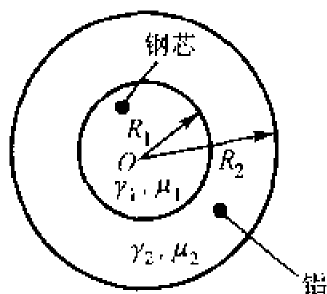

题 3－9 图

**3－9** 题 3－9 图为一半径为 $a$、磁导率为 $\mu$ 的长直圆柱，通过密度为 $J_0\boldsymbol{e}_z$ 均匀分布的电流，圆柱周围是真空。求圆柱内外的 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$ 及磁化电流密度 $\boldsymbol{J}_m$ 和 $\boldsymbol{K}_m$。

**3－10** 设载流为 $I$ 的钢芯电缆，其内导体（钢芯）电导率为 $\gamma_1$，磁导率 $\mu_1 = 500\ \mu_0$；外层导体（铝）电导率为 $\gamma_2$，磁导率 $\mu_2 \approx \mu_0$。求：

(1) 电缆内电流的分布；

(2) 电缆内外各处（即 $\rho < R_1$，$R_1 < \rho < R_2$ 和 $\rho > R_2$ 三区域中）磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布。

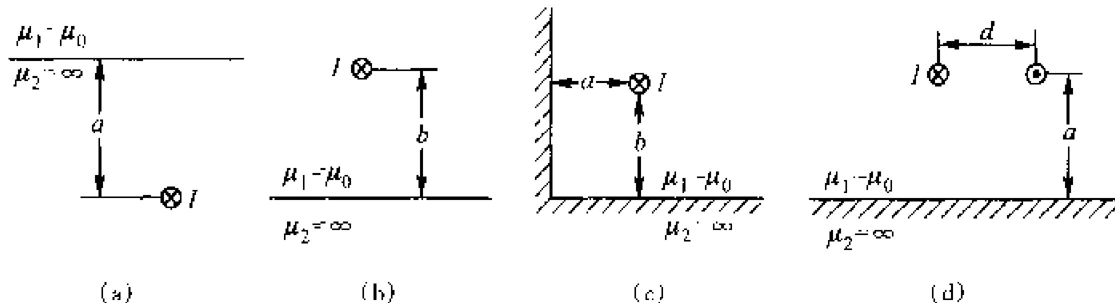



题 3－10 图

**3－11** 真空中，在 $x = -2$ m、$y = 0$ 处，有一沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向 6 mA的线电流；另外在 $x = 2$ m、$y = 0$ 处，有一沿（$-\boldsymbol{e}_z$）方向 6 mA的线电流。设原点的标量磁位 $\varphi_m = 0$，试求沿 $y$ 轴的 $\varphi_m$。

**3－12** 真空中厚度为 $d$ 的无限大导板（$\mu = \mu_0$），通有密度为 $J_0\boldsymbol{e}_z$ 的体电流，求矢量磁位及磁感应强度。

**3－13** 画出题 3－13 图所示各种情况下的镜像电流，注明电流的方向、量值及有效的计算区域。




题 3－13 图

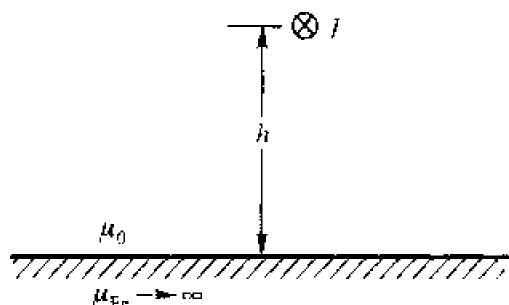
**3－14** 一长直载流导线平行于一无限大铁板($\mu_{Fe}\to\infty$),相距为 $h$,通过的电流 $I$ 方向如题 3－14 图所示,求:

(1) 铁板表面任意点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$;

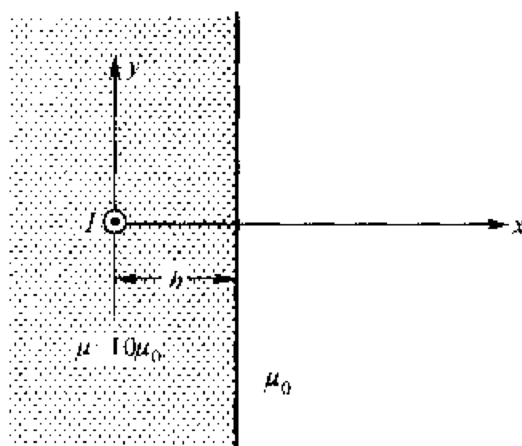
(2) 铁板内任意点处的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$;

(3) 定性描绘场图;

(4) 载流导线所受到的磁场力。




题 3－14 图



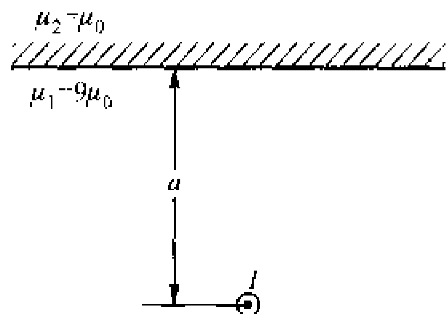

题 3－15 图

**3－15** 在大块铸铁板内,距其平表面 $h=15$ cm 处,钻孔埋设了一根载流为 $I=10$ A 的长直绝缘细导线。设铸铁的磁导率为 $\mu=10\mu_0$,求:

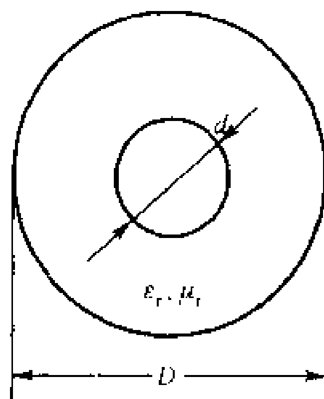
(1) 在 $y=0$ 平面内,沿 $x$ 轴正向的磁感应强度值 $B=f(x)$ 的变化关系;

(2) 作用于导线每单位长度上的电磁力 $\boldsymbol{F}$。

**3－16** 在磁导率为 $\mu_1$ 的媒质 1 中,有载流直导线与两媒质分界面平行,垂直距离为 $a$。设 $\mu_2=\mu_0$,$\mu_1=9\mu_0$。参阅题 3－16 图,求两种媒质中的磁场强度和载流导线每单位长度所受之力。




题 3－16 图




题 3－17 图

**3－17** 一无损耗同轴电缆尺寸如题 3－17 图所示。求:

(1) 单位长度的外电感 $L_0$;

(2) 单位长度的电容 $C_0$;

(3) 若 $D=5$ mm，$d=1.37$ mm，介质的 $\varepsilon_r=2.4$，$\mu_r=1$，求此电缆的特性阻抗 $Z_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ 多大？

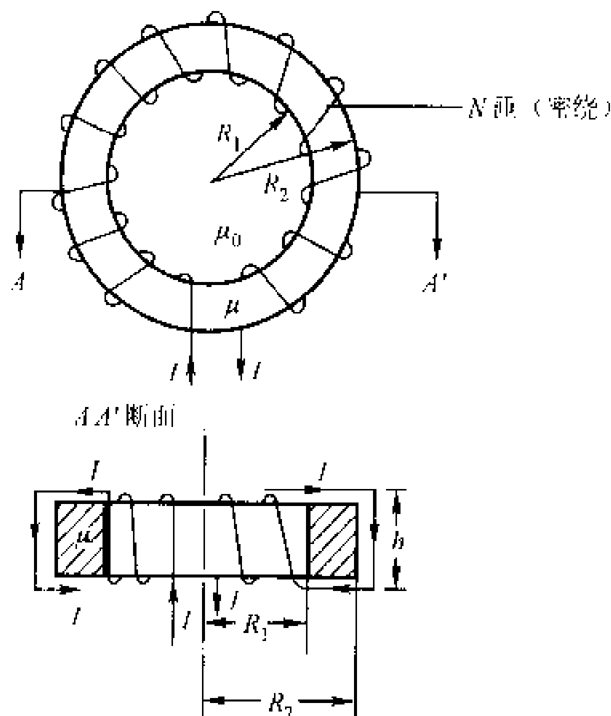
**3－18** 一均匀密绕 $N$ 匝的环形螺线管，尺寸如题 3－18 图所示。环形铁心的磁导率为 $\mu$，求：

(1) 环内的磁场强度 $\boldsymbol{H}$；

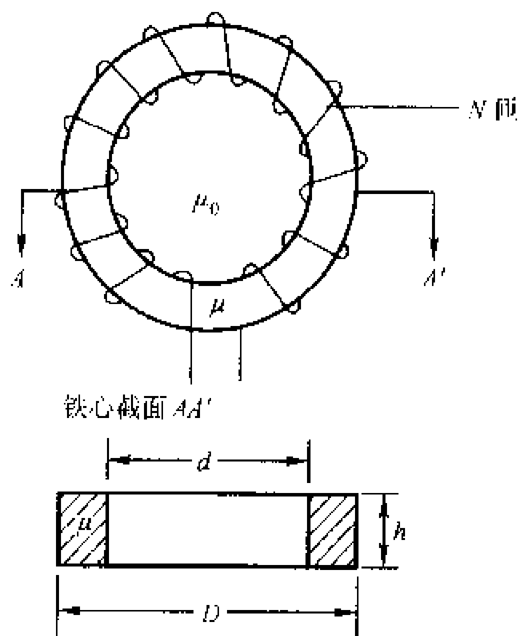
(2) 环形铁心截面中的磁通 $\Phi$；

(3) 该线圈的电感(自感)$L$；

(4) 该螺线管中存储的磁场能量 $W_m$。



题 3－18 图



题 3－19 图

**3－19** 一镯环形铁心线圈，如题 3－19 图所示，其有关几何尺寸与参数为 $D=8$ cm，$d=5$ cm，$h=2$ cm，$\mu=125\,\mu_0$。试问：为获得一个 20 mH 的电感，该线圈的匝数 $N$ 应为多少？

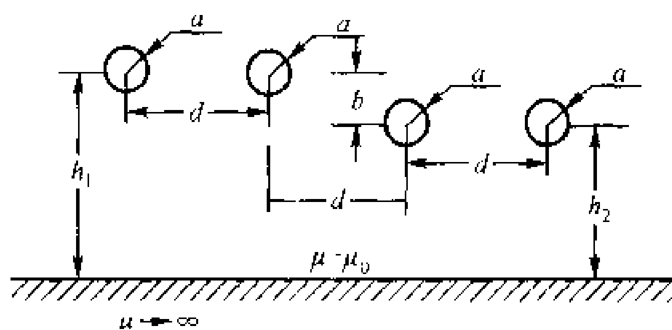
**3－20** 二对位于空气中的无限长直导线(导线半径为 $a$)，分别平行放置并与一无限大铁面相距为 $h_1$ 和 $h_2$，且 $h_1$、$h_2$、$d\gg a$，如题 3－20 图所示。试求二对导线间的互感。

**3－21** 一矩形线框(匝数为 $N$)置于一无限长直载流导线(半径为 $R$)的近旁，如题 3－21图所示，框边与线轴平行。试求：

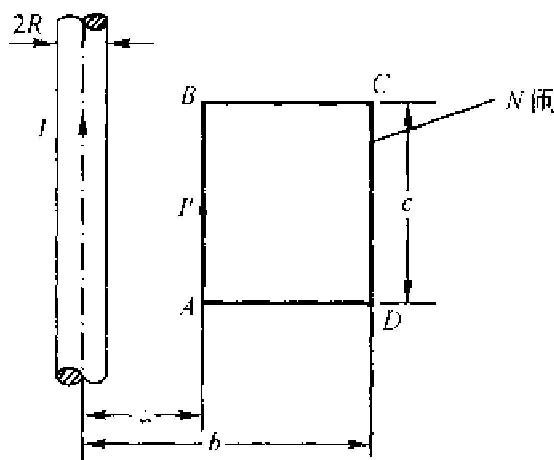
(1) 长直载流导线与线框间的互感 $M$；

(2) 若线框中顺时针方向流过电流 $I'$，试计算线框各边所受的作用力(在图中标出力的参考方向)，并求该线框所受的合力。

**3－22** 一三角形线圈与一长度为 $2L$ 的长直载流细导线位于同一平面($\rho Oz$ 平面)内，如题 3－22 图所示。设 $L\gg a$、$b$、$c$，$a=30$ cm，$b=10$ cm，$c=20$ cm，三角形线圈匝数 $N=50$。




题 3－20 图



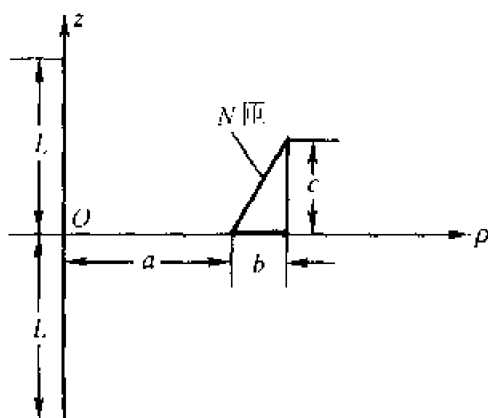

题 3－21 图

求：

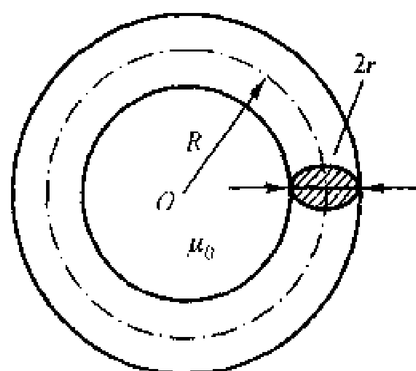
(1) 设长直载流导线中通有恒定电流 $I$，计算线圈与导线间的互感 $M$；

(2) 若长直载流导线中流过的电流为一正弦稳态交变电流 $i=\sqrt{2}I\cos\omega t$，正方向如前，$I=100$ A，$f=50$ Hz，计算在三角形线圈中产生的感应电动势(应标明正方向)。

**3－23** 求题 3－23 图所示环形圆截面导线通有电流 $I$ 时所受的力。设已知环形导线的电感 $L=\mu_0 R\left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right)-2\right]+\frac{\mu_0 R}{4}$，式中 $R$ 为环的平均半径；$r$ 为导线半径。




题 3－22 图

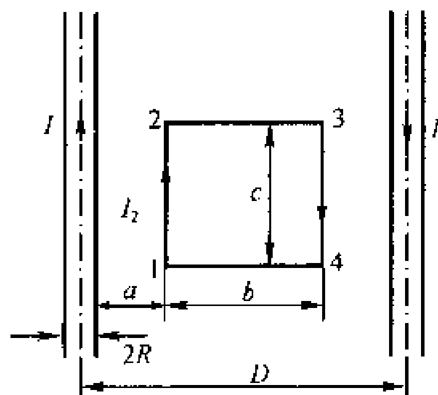



题 3－23 图

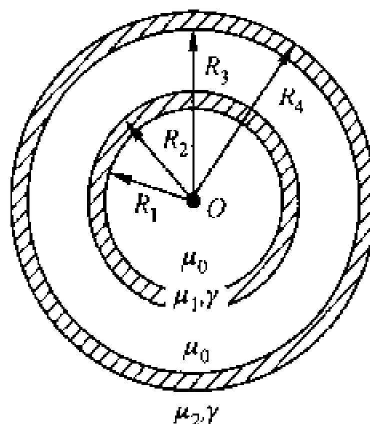
**3-24** 参阅题3-24图，当线框通有电流 $I_2$ 时，试用以下方法求长直导线(通有电流 $I$)对它的作用力：

(1) 用计算式 $\boldsymbol{F}=\int I(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$；

(2) 应用虚功原理。




题3-24图




题3-25图

**3-25** 求题3-25图所示两同轴导体壳系统中储存的磁场能量及自感。

# 第4章

# 准静态电磁场

麦克斯韦方程组描述了时变电磁场中时变电场与时变磁场相互依存又相互制约，并以有限速度在空间传播，形成电磁波的普遍规律。此时，电磁场量的激励与响应不是同时发生的，场量的时间变量 $t$ 与空间变量 $r$ 相关。但在许多工程问题中，尤其在电气设备、电力传输、生命科学等领域，时变电磁场的频率较低，因而在某些特定的情况下，可以忽略二次源 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 或 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 的作用，使场具有类同静态电磁场的特点，这类场被称之为准静态电磁场。

本章在麦克斯韦方程组的基础上，介绍准静态电磁场的两种形式：电准静态场(Electroquasistatic field，简记为 EQS 场)和磁准静态场(Magnetoquasistatic field，简记为 MQS 场)。并结合具体实例，描述准静态电磁场的工程应用。

## 4.1 准静态电磁场

在时变电磁场中，根据激励源频率的不同，可分类为高频电磁场和低频电磁场。对于低频电磁场，由于电磁场随时间 $t$ 的变化缓慢，在不影响工程计算精度的前提下，往往可以忽略麦克斯韦方程组中的 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 或 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 的作用，以简化计算过程。简化后的电磁场称为准静态电磁场，它具有类同于静态电磁场的某些特征。根据被忽略的 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 或 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 项，相应的准静态电磁场又可被进一步分类为电准静态场或磁准静态场。对于高频电磁场，其时变电场与时变磁场相互激励，将归属在下一章动态电磁场中进行深入研究。

### 4.1.1 电准静态场

时变电场由电荷 $q(t)$ 和变化的磁场 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 产生，分别建立对应的库仑电场 $\boldsymbol{E}_q$

和感应电场 $E_i$。在低频电磁场中，如果感应电场 $E_i$ 远小于库仑电场 $E_q$，则可以忽略 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 的作用，这时，麦克斯韦方程组中的时变电场满足

$$\begin{cases} \nabla \times E \approx 0 \\ \nabla \cdot D = \rho \end{cases} \tag{4-1}$$

称之为电准静态场。显然，在忽略随时间变化的磁场对电场作用的前提下，电准静态场具有与静电场类同的有源无旋性，因此，两种场的计算方法相同。与静电场相仿，电准静态场也可以用随时间变化的电位 $\varphi(t)$ 的负梯度表示，即

$$E = -\nabla\varphi \tag{4-2}$$

因而与静电场相仿，从式(4-1)可导出电位 $\varphi(t)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho(t)}{\epsilon} \tag{4-3}$$

与电准静态场对应的时变磁场，基于麦克斯韦方程组，应遵从

$$\begin{cases} \nabla \times H = \gamma E + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \tag{4-4}$$

电力传输系统和装置中的高压电场，各种常用电子器件、设备，以及 5.4.2 节所述的天线近区的电场等均属电准静态场的工程应用实例。

### 4.1.2 磁准静态场

时变磁场的激励源是传导电流密度 $J_c(t)$ 和位移电流密度 $J_D = \frac{\partial D}{\partial t}$。在低频电磁场中，如果 $J_D \ll J_c$（即使在高频激励下，对于导体，某些情况也能满足此条件），可以忽略位移电流，这时，麦克斯韦方程组中的时变磁场满足

$$\begin{cases} \nabla \times H \approx J \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \tag{4-5}$$

称之为磁准静态场。显然，在忽略位移电流的条件下，磁准静态场具有与恒定磁场类同的有旋无源性，因此，两种场的计算方法相同。与恒定磁场相仿，磁准静态场也可以用随时间 $t$ 变化的矢量位函数 $A(t)$ 的旋度表示，即

$$B = \nabla \times A \tag{4-6}$$

同样，$A(t)$ 满足矢量泊松方程

$$\nabla^2 A = -\mu J \tag{4-7}$$

与磁准静态场对应的时变电场，基于麦克斯韦方程组，应遵从

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \end{cases} \tag{4-8}$$

除了运行于低频(如工频)情况下的各类电磁装置中的磁场问题,电工技术中的涡流问题是这类磁准静态场的典型应用实例,它广泛地伴随在电机、变压器、感应加热装置、磁悬浮系统、电磁测量仪表、磁记录头和螺线管传动机构等工程问题之中。

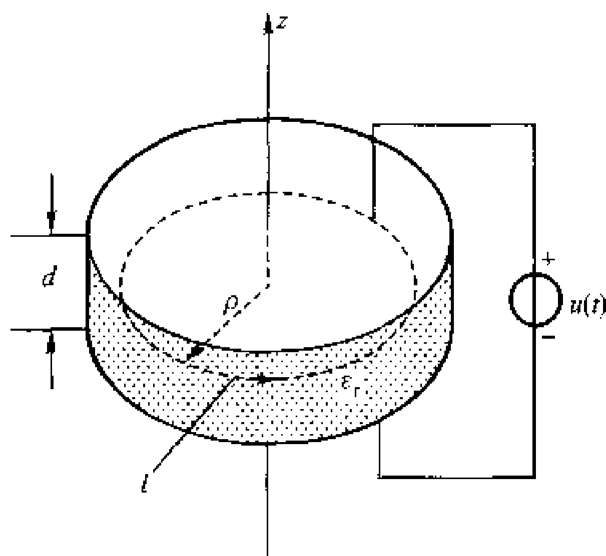



图4－1 平板电容器

**例 4－1** 一圆形平板电容器如图4－1所示,极板间距 $d=0.5$ cm,电容器填充 $\varepsilon_r=5.4$ 的云母介质,极板间外施电压 $u(t)=110\sqrt{2}\cos(314t)$ V,忽略边缘效应。试求极板间的电场与磁场。

[解] 极板间的电场由极板上的电荷 $q(t)$ 和变化的电磁场产生。在工频情况下,忽略 $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 的影响,极板间的电场近似为 EQS 场。在如图 4－1 设定的坐标系下,仿照静电场计算,得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{u}{d}(-\boldsymbol{e}_z) = \frac{\sqrt{2}\times 110}{0.5\times 10^{-2}}\cos(314t)(-\boldsymbol{e}_z)\ \text{V/m} \\ &= 3.11\times 10^4\cos(314t)(-\boldsymbol{e}_z)\ \text{V/m} \end{aligned}$$

磁场由全电流定律得出,即由

$$\begin{aligned} \oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho H_\phi &= \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= -3.11\times 10^4\times 314\varepsilon_r\varepsilon_0\sin(314t)\pi\rho^2(-\boldsymbol{e}_z)\cdot(\boldsymbol{e}_z) \end{aligned}$$

故极板间磁场

$$\boldsymbol{H} = H_\phi \boldsymbol{e}_\phi = 2.3\times 10^{-4}\rho\sin(314t)\boldsymbol{e}_\phi \quad \text{A/m}$$

若考虑因变化的磁场产生的感应电场，则有

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

即

$$-\frac{\partial E_z}{\partial\rho} = -\mu_0 314\times 2.3\times 10^{-4}\rho\cos(314t)$$

由此得

$$E_z = 4.537\times 10^{-8}\rho^2\cos(314t)\ \text{V/m}$$

可见，在工频时，由变化的磁场产生的感应电场远小于库仑电场。因此，忽略$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$的影响是符合工程分析要求的。

**例 4－2** 通有工频交流 $i = I_m\sin(\omega t)$的单匝空心线圈，如图 4－2(a)所示。已知该线圈的内、外自感分别为 $L_i$ 和 $L_o$，电阻为 $R$，试分析该线圈两端点 $A$、$B$ 间电压的正确物理含义。

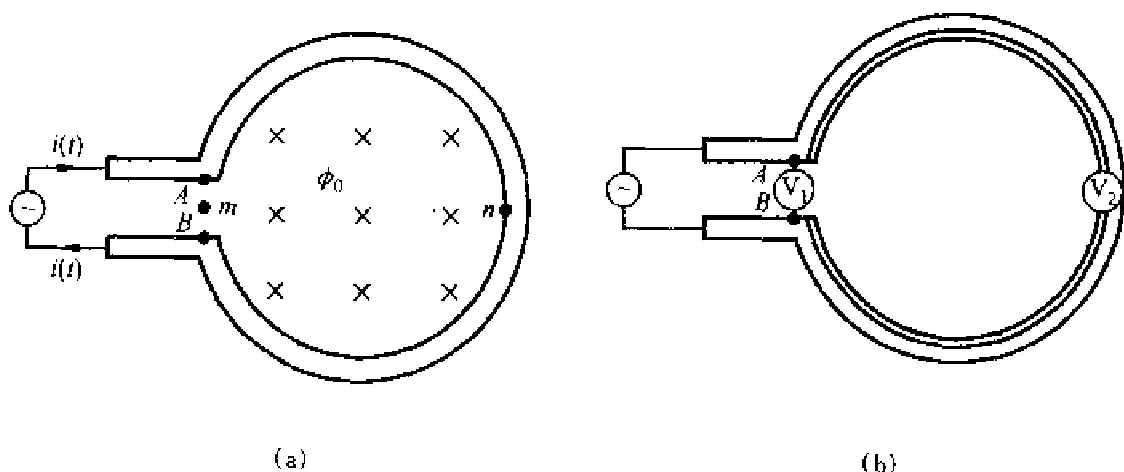



图 4－2 时变电磁场中的载流线圈

［解］ 该工频载流线圈在空间激发时变电磁场，但其位移电流效应可以略而不计，故属 MQS 场。此时，由基本方程(4－8)可知，时变电场为有旋场(非守恒场)，因此，若沿两端点间最短路径 $AmB$ 定义电压 $u_1$，即有

$$u_1 = \int_{AmB}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = Ri + L_i\frac{di}{dt} + L_o\frac{di}{dt}$$

而对闭合回路 $AnBmA$，根据电磁感应定律可得

$$\oint_{AnBmA}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{AnB}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{BmA}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \int_{AnB}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{AmB}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_o}{dt} = -L_o\frac{di}{dt}$$

由此可见,若沿着线圈表面选取积分路径 $AnB$,则可定义两端点间电压 $u_2$ 为

$$u_2 = \int_{AnB} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_{AnBmA} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= Ri + L_i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

这表明,在时变电磁场中无两点间电压的物理概念。换句话说,论及时变电磁场中电压时,除需指明作为始点与终点的两端点外,还必须指明两端点间电压所取的积分路径。

基于以上分析,可见在时变电磁场中测量电压时,务须正确配置电压表及其引线的空间位置。就本例而言,如图 4－2(b)所示,Ⓥ$_1$ 和 Ⓥ$_2$ 将可分别测得对应的电压值 $u_1$ 和 $u_2$。应强调指出的是,测量电压 $u_2$ 时,电压表 Ⓥ$_2$ 及其引线均应紧贴导线表面。

### 4.1.3　不同媒质分界面上的边界条件

由准静态场与静态场基本方程之间的比较可见,仅麦克斯韦方程组中的两个旋度方程有异。因此,只需推导准静态场中不同媒质分界面上场量的切向分量之间的关系。

参照静电场中关于旋度方程 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$ 的讨论,对于磁准静态场中旋度方程 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ,类同于图 2－14 的相同处置,可得

$$-E_{1t}\Delta l_1 + E_{2t}\Delta l_1 = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_\tau \Delta l_1 \Delta l_2$$

即

$$E_{1t} - E_{2t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_\tau \Delta l_2$$

式中下标 $\tau$ 表示$(\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{e}_t)$方向的分量。显然,当设定的狭小矩形回路 $l$ 向 $P$ 点收缩时,只要$\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_\tau$ 不是无限大,则必应有

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

因而电场强度的切向分量依然连续,即

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{4-9}$$

同样,对于电准静态场中旋度方程 $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ,类比于

恒定磁场中旋度方程 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的讨论，只要在分界面上 $\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)_\tau$ 是有限量，则必有

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{4-10}$$

式中，如 3.5.3 节所述，$K$ 为分界面上沿 $(\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n)$ 方向取向的传导电流面密度矢量 $\boldsymbol{K}$ 的模。

### 4.1.4 时谐电磁场的复数表示

在很多实际工程问题中，场源及其所产生的电场和磁场都随时间作正弦变化，而且即使是非正弦的变化，也可将其分解为基波及其各高次谐波分量效应的叠加予以研究。因此，在准静态与动态电磁场的工程问题中，随时间作正弦变化的时变电磁场（简称为时谐电磁场）系最基本的研究对象。以电场强度为例，在直角坐标系下可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = {} & \boldsymbol{e}_x E_{xm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t + \phi_x(\boldsymbol{r})] + \boldsymbol{e}_y E_{ym}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t + \phi_y(\boldsymbol{r})] \\ & + \boldsymbol{e}_z E_{zm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t + \phi_z(\boldsymbol{r})]\end{aligned} \tag{4-11}$$

式中 $\omega$ 是角频率；$E_{xm}$、$E_{ym}$、$E_{zm}$ 及 $\phi_x$、$\phi_y$、$\phi_z$ 分别是电场强度在所取直角坐标系下三个分量的振幅和初相位。一般而言，各个分量的振幅和初相位是空间坐标的函数。

采用正弦量的相量表示法，式(4-11)可被表示为如下复矢量（相量）

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_x \dot{E}_{xm}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_y \dot{E}_{ym}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_z \dot{E}_{zm}(\boldsymbol{r}) \tag{4-12}$$

式中 $\dot{E}_{xm} = E_{xm}e^{j\phi_x}$，$\dot{E}_{ym} = E_{ym}e^{j\phi_y}$ 和 $\dot{E}_{zm} = E_{zm}e^{j\phi_z}$。而原来的瞬时矢量与复矢量的关系为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}] \tag{4-13}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ 为与复矢量（振幅）$\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})$ 对应的有效值表示。

在采用复矢量表示时谐电磁场后，麦克斯韦方程组[式(1-85a)—(1-85d)]可写为如下复数形式：

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\boldsymbol{J}}_{cm} + j\omega \dot{\boldsymbol{D}}_m \tag{4-14a}$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m = -j\omega \dot{\boldsymbol{B}}_m \tag{4-14b}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}}_m = 0 \tag{4-14c}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}}_m = \dot{\rho}_m \tag{4-14d}$$

类似地，也可以写出媒质构成方程组[式(1－87)—(1－89)]的复数形式。

一般称式(1－85a)—(1－85d)为麦克斯韦方程组的时域形式，而称式(4－14a)—(4－14d)为麦克斯韦方程组的频域形式。显然，采用复数表示时谐电磁场后，在麦克斯韦方程组的频域形式中，不再含有场量对时间 $t$ 的偏导数，从而使时谐电磁场的分析与直接在时域形式下的分析相比，得以明显简化。为书写简便，同时，也基于实际测量中所得为正弦量的有效值，故本书采用复矢量的有效值展开时谐电磁场的讨论。

**例 4－3**　写出下列与时谐电磁场对应的复矢量(有效值)或瞬时矢量：

(1) $\dot{H}_x = \mathrm{j}H_0\sin\theta\cos(\beta x\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z\sin\theta}$；

(2) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y E_{ym}\cos(\omega t - \beta x + \alpha) + \boldsymbol{e}_z E_{zm}\sin(\omega t - \beta x + \alpha)$。

**[解]**　(1) $H_x(\boldsymbol{r}, t) = \sqrt{2}H_0\sin\theta\cos(\beta x\cos\theta)\cos\left(\omega t - \beta z\sin\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$= -\sqrt{2}H_0\sin\theta\cos(\beta x\cos\theta)\sin(\omega t - \beta z\sin\theta)$$

(2)
$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_y E_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta x - \alpha)} + \boldsymbol{e}_z E_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\beta x - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \boldsymbol{e}_y E_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta x - \alpha)} - \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}E_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta x - \alpha)}$$

## 4.2　导电媒质中自由电荷的弛豫过程

在导电媒质中，自由电荷体密度 $\rho$ 随时间衰减的过程称为电荷的弛豫过程。本节将证明，该过程使均匀导电媒质中不可能存在体电荷分布，而在分块均匀的导电媒质分界面上，或导电媒质与理想介质的分界面上，则将积累有呈面密度 $\sigma$ 分布的自由电荷。

### 4.2.1　均匀导电媒质中的电荷弛豫

在电导率为 $\gamma$，介电常数为 $\varepsilon$ 的均匀导电媒质中，考虑到 $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E} = \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\boldsymbol{D}$ 及 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$，电荷守恒定律[式(1－73)]可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho = 0 \qquad (4-15)$$

这是一阶常微分方程，其解为

$$\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}} \qquad (4-16)$$

式中 $\rho_0$ 为 $t = 0$ 时的电荷分布；$\tau_e = \varepsilon/\gamma$(秒)称为弛豫时间。一般情况下，良导体的介电常数 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$，电导率在 $10^7$ S/m 的数量级上，所以 $\tau_e$ 非常小。这表明，

在导体内部，体电荷很快衰减至零，这个衰减过程就是自由电荷的弛豫过程。自由电荷在弛豫过程中的定向运动形成电流，该电流也是衰减的($i \propto e^{-\frac{t}{\tau_e}}$)，所以，电流产生的磁感应强度随时间的变化率可以忽略不计，电荷弛豫过程的电磁场可近似为 EQS 场。

### 4.2.2 分块均匀导电媒质中的电荷弛豫

在分块均匀导电媒质的分界面上，根据 $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q$，由 4.1.3 节的讨论，在分界面上，电位移矢量的法向分量应满足式(2-55)，即

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma \tag{4-17}$$

根据电荷守恒定律 $\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$，不难导出，分界面上的衔接条件为

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{4-18}$$

以 $\boldsymbol{J}_1 = \gamma_1 \boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{J}_2 = \gamma_2 \boldsymbol{E}_2$，以及式(4-17)代入上式，整理得

$$(\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}) = 0 \tag{4-19}$$

上式表明，在时变电磁场中，位于导电媒质分界面上的全电流密度法向分量连续。现以双层有损介质的平板电容器为例，通过求解由式(4-19)给出的电场法向分量对时间 $t$ 的一阶微分方程，即可分析在导电媒质分界面上自由电荷的积累过程。

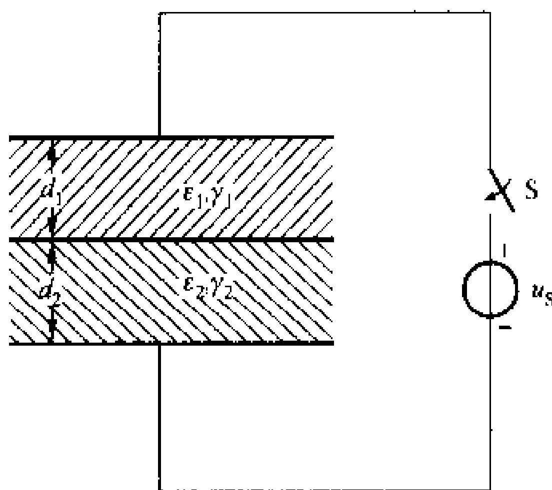



图 4-3 双层有损介质电容器

设平板电容器如图 4-3 所示，当 $t \leqslant 0_-$ 时，电容器处于零状态，极板上没有

电荷，即 $E_1(0_-)=E_2(0_-)=0$，$u(0_-)=0$；$t\geqslant 0_+$ 时，电容器的端电压被强制跃变，即 $u(0_+)=u_S$。根据电容的伏安关系 $i=C\dfrac{du}{dt}$ 得知，电路中将出现冲激电流，极板上的电荷将发生跃变。此时，位移电流相对较大，但因电容器中漏电流很小，故合成的全电流产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的变化率 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 可以忽略不计，故电容器中的电磁场可按 EQS 场分析。

在 EQS 场中，$t\geqslant 0_+$ 时

$$E_1d_1+E_2d_2=u_S \tag{4-20}$$

按分界面上的边界条件[式(4-19)]得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1)+(\gamma_2E_2-\gamma_1E_1)=0 \tag{4-21}$$

从式(4-20)和(4-21)中消去 $E_2$，则有

$$(d_2\varepsilon_1+d_1\varepsilon_2)\frac{dE_1}{dt}+(d_2\gamma_1+d_1\gamma_2)E_1=\gamma_2u_S+\varepsilon_2\frac{du_S}{dt} \tag{4-22}$$

这是关于 $E_1$ 的一阶非齐次微分方程，其通解形式为

$$E_1=\text{齐次方程的解 } E_1'+\text{稳态解 } E_1'' \tag{4-23}$$

将稳态解 $E_1''$ 代入方程(4-22)，并因 $t\to\infty$ 时，$\dfrac{du_S}{dt}=0$，故有

$$E_1''=\frac{\gamma_2u_S}{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2} \tag{4-24}$$

设 $E_1'=Ae^{pt}$，代入与式(4-22)对应的齐次微分方程，得特征根

$$p=-\frac{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2}{d_2\varepsilon_1+d_1\varepsilon_2}=-\frac{1}{\tau_e}$$

式中弛豫时间 $\tau_e$ 为

$$\tau_e=\frac{d_2\varepsilon_1+d_1\varepsilon_2}{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2}$$

综合以上分析结果，式(4-23)可以表示为

$$E_1=Ae^{-\frac{t}{\tau_e}}+\frac{\gamma_2u_S}{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2} \tag{4-25}$$

为了得到 $E_1$ 的初始条件，将式(4-22)两边对时间 $t$ 积分，取时间区间为 $0_-\to 0_+$，可得

$$\int_{0_-}^{0_+}(d_2\varepsilon_1+d_1\varepsilon_2)dE_1+\int_{0_-}^{0_+}(d_2\gamma_1+d_1\gamma_2)E_1dt=\int_{0_-}^{0_+}\gamma_2u_Sdt+\int_{0_-}^{0_+}\varepsilon_2du_S$$

由于 $E_1(0_-)=0$，$u_S(0_-)=0$，$(d_2\gamma_1+d_1\gamma_2)E_1$ 与 $\gamma_2u_S$ 为有限值，所以

$$E_1(0_+) = \frac{\varepsilon_2 u_S}{d_2\varepsilon_1 + d_1\varepsilon_2} \tag{4-26}$$

这样，当 $t=0_+$ 时，可解得

$$A = \frac{\varepsilon_2 u_S}{d_2\varepsilon_1 + d_1\varepsilon_2} - \frac{\gamma_2 u_S}{d_2\gamma_1 + d_1\gamma_2}$$

因此，开关闭合后，$E_1$ 的过渡过程为

$$E_1 = \frac{\gamma_2 u_S}{d_2\gamma_1 + d_1\gamma_2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}}) + \frac{\varepsilon_2 u_S}{d_2\varepsilon_1 + d_1\varepsilon_2} e^{-\frac{t}{\tau_e}} \tag{4-27}$$

将上式代入式(4-20)，即得

$$E_2 = \frac{\gamma_1 u_S}{d_2\gamma_1 + d_1\gamma_2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}}) + \frac{\varepsilon_1 u_S}{d_2\varepsilon_1 + d_1\varepsilon_2} e^{-\frac{t}{\tau_e}} \tag{4-28}$$

所以，分界面上的面电荷密度为

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{d_2\gamma_1 + d_1\gamma_2} u_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}}) \tag{4-29}$$

可以看出，开始充电时，分界面上 $\sigma=0$。随着时间 $t$ 增加，分界面上的面电荷逐渐积累，直至电路到达稳态时，$\sigma=$ 常数（显然，例 3-2 所讨论的恒定电流场问题，即属本论题的稳态解）。

以上结论可以推广到一般情况，即当对多导体区域充电时，在不同导电媒质的交界面上会产生面自由电荷的分布。由式(4-29)可见，惟当相邻媒质满足 $\varepsilon_2\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma_2$ 条件时，交界面上面电荷 $\sigma=0$，即不会有面自由电荷的积累。

## 4.3 集肤效应与透入深度·电磁屏蔽

将导电媒质放置在变化的磁场中，或在导电媒质中通以交变电流，由于交变磁场产生的感应电场的作用，将使场量在导体表面分布密集，且沿其纵深方向衰减，呈现所谓集肤效应。本节将定量分析时变电磁场在导电媒质中的扩散过程，引入反映集肤效应程度的透入深度的概念，同时介绍电磁屏蔽。

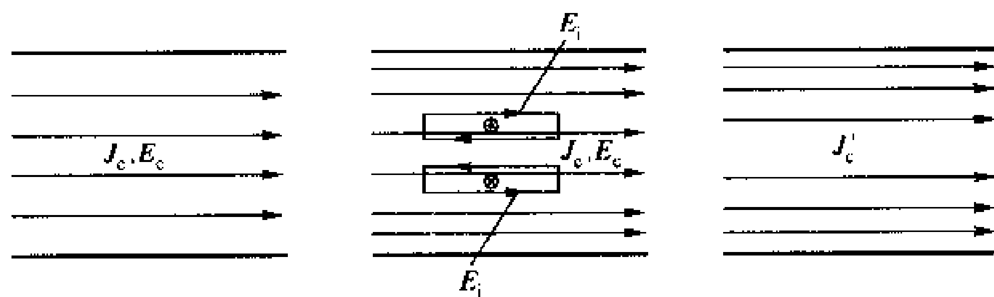
### 4.3.1 集肤效应与透入深度

当导体中通有低频交变电流时，若可忽略位移电流和感应电场效应，则导体中电磁场应满足的麦克斯韦方程组简化为：

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \end{cases}$$

且被称为准静电流场，即时变电流场的瞬时状态等同于观察瞬间看作直流电流的恒定电流场效应。因此，可以采用恒定电流场的计算方法来求解准静电流场的问题，这里不再展述。

在高频交变电流情况下，导体内因传导电流的磁场所激励的感应电场 $\boldsymbol{E}_i$ 与传导电流的电场 $\boldsymbol{E}_c = \boldsymbol{J}_c/\gamma$ 相比已不再允许忽略。从图4-4圆导体截面内电磁场的分布可清楚地观察这一现象，$\boldsymbol{E}_c$ 与 $\boldsymbol{E}_i$ 在导体表面区域相互增强，而在内部区域则部分相消，导致场量在导体表面分布集中，而内部衰减显著的集肤效应。




(a) 低频，电流均匀分布　　(b) 高频，感应电场的作用　　(c) 集肤效应

图 4-4　圆导体截面内电磁场分布示意图

设相对于传导电流可以忽略不计位移电流的影响，此时，导体中电磁场可近似为 MQS 场，满足方程：

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \end{cases}$$

首先，从上述方程中消去 $\boldsymbol{H}$，其过程是

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

运用矢量恒等式及 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，有

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

所以

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4-30}$$

同理，可推得

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{4-31}$$

式(4-30)和(4-31)称为电磁场的扩散方程。如果是时谐电磁场问题，则对应的相量(有效值)形式的扩散方程即为：

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma \dot{\boldsymbol{E}} = P^2 \dot{\boldsymbol{E}} \tag{4-32}$$

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{H}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma \dot{\boldsymbol{H}} = P^2 \dot{\boldsymbol{H}} \tag{4-33}$$

式中 $P=\sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\gamma}=\sqrt{\dfrac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+\mathrm{j})=\dfrac{1}{d}(1+\mathrm{j})$。

对于一维场问题，如在图 4－5 所示的半无限大导体（$x>0$）中，高频电流沿

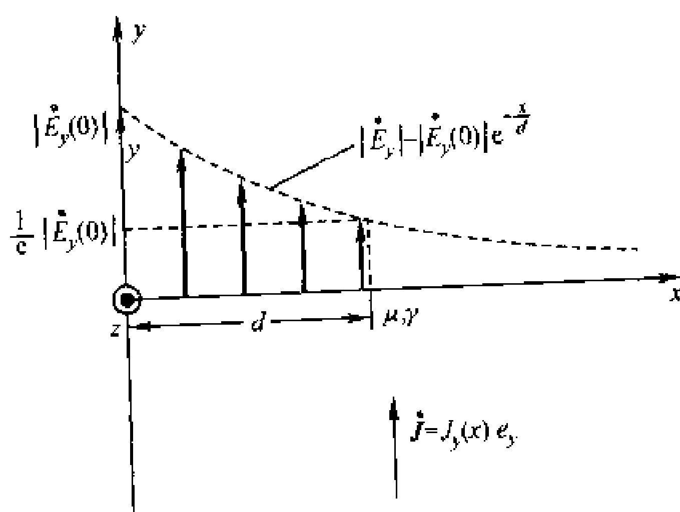



图 4－5　半无限大导体内的集肤效应

y 轴方向流动，即 $\dot{\boldsymbol{J}}=\dot{J}_y\boldsymbol{e}_y$，且 $\dot{J}_y$ 仅为坐标 $x$ 的函数，则可得场量 $\dot{\boldsymbol{E}}=\dot{E}_y(x)\boldsymbol{e}_y$。故满足方程（4－32）的解为

$$\dot{E}_y=A\mathrm{e}^{-Px}+B\mathrm{e}^{Px}$$

考虑到当 $x\to\infty$ 时，$\dot{E}_y$ 为有限值，所以 $B=0$；并设 $x=0$ 处，$\dot{E}_y=\dot{E}_y(0)$，则得

$$\dot{E}_y=A\mathrm{e}^{-Px}=\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-Px}\tag{4-34}$$

而由 $\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\gamma\dot{\boldsymbol{E}}$，可知 $\dot{\boldsymbol{H}}=\dot{H}_z(x)\boldsymbol{e}_z$，从而同理可得满足方程（4－33）的解为

$$\dot{H}_z=\dot{H}_z(0)\mathrm{e}^{-Px}\tag{4-35}$$

以及

$$\dot{J}_y=\gamma\dot{E}_y=\gamma\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-Px}=\dot{J}_y(0)\mathrm{e}^{-Px}\tag{4-36}$$

式中 $\dot{E}_y(0)$，$\dot{H}_z(0)$ 和 $\dot{J}_y(0)$ 分别是导体表面（$x=0$）上的相应场量值。

以电场为例，展开式（4－34）

$$\dot{E}_y=\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{d}(1+\mathrm{j})x}=\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}\tag{4-37}$$

式中 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 表示衰减因子，当 $x=d$ 时，有

$$|\dot{E}_y|=|\dot{E}_y(0)|\mathrm{e}^{-1}$$

即距离表面 $x=d$ 处的场强值比 $x=0$ 处的场强值减少了 e 倍。这一距离 $d$ 就称为该导体的“透入深度”,即

$$d=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \tag{4-38}$$

它表征了电磁场在导体中的衰减率,示意于图 4-5。显然,$d$ 愈小,场量衰减得愈快。换句话说,场量的集肤效应越显著。通常认为,当 $x=(4\sim5)d$ 时,场量已近似衰减为零。

在式(4-37)中,$e^{-j\frac{x}{d}}$ 表示场量的相位变化。必须注意的是,$e^{-j\frac{x}{d}}$ 并不表征如后章所述的电磁波传播过程中的滞后相位。这是因为忽略了位移电流后的 MQS 场,不存在时变电场与时变磁场之间的相互激励,也就不存在电磁波,它属于似稳场的范畴。因此,$e^{-j\frac{x}{d}}$ 仅反映电磁场在扩散过程中的相位变化。

### 4.3.2 电磁屏蔽

随着电子技术的迅速发展,电子、电气设备或系统得到了愈来愈广泛的应用,但与此同时,由此而产生的电磁干扰问题又制约着人们的生产与生活。对此,专题 6.5 将作较全面的阐述。这里,主要介绍保护被干扰空间或设备的方法之一——电磁屏蔽。

电磁屏蔽是用于减弱空间某个区域内电磁场的技术装置。在绝大多数情况下,电磁屏蔽由金属(铝、铜、钢)制成。但是为了防护静磁场和极低频磁场的作用,也采用铁磁材料。电磁屏蔽类型的选择取决于干扰源的距离、场的性质、频率和被保护空间对抗干扰的要求等因素。正如静电场、恒定磁场是时变电磁场的特殊情况一样,静电屏蔽和静磁屏蔽是电磁屏蔽的特殊类型。

如果被保护空间要求减弱静电场或低频电场(电准静态场),而磁场基本不受影响,那么,电场屏蔽的选择,应采用非磁性金属壳或金属网接地的方法。屏蔽原理是利用金属表面感应的静止或时变电荷,并通过接地线的引入,以消除两带电体之间的电容耦合,但保持电感耦合。电场屏蔽的效能可由不存在屏蔽时空间场强 $E_0$ 与存在屏蔽时空间场强 $E_1$ 的比值来表征,定义为

$$S=20\lg\left(\frac{E_0}{E_1}\right)\quad(\text{单位:dB}) \tag{4-39}$$

当 $E_1=0$ 时,称为全屏蔽,如静电屏蔽。

如果被保护空间要求减弱静磁场,或低频磁场,而不考虑电场是否也能减弱,那么,磁场屏蔽的选择,应采用铁磁材料制成的屏蔽体,并且要求屏蔽体有一定的厚度或采取多层屏蔽的组合形式。磁场屏蔽是基于磁场线分布总是趋向于

取磁阻小的路径的原理，屏蔽效能定义为

$$S = 20\lg\left(\frac{H_0}{H_1}\right) \quad (\text{单位:dB}) \tag{4-40}$$

式中 $H_0$ 和 $H_1$ 分别是未屏蔽和屏蔽时空间的磁场强度。如果屏蔽体接地，便同时实现了电场屏蔽。4.5 节将给出磁场屏蔽的实例。

如果被保护区域位于高频电磁场的空间，则利用电磁能量在良导电媒质中急剧衰减的原理，即导电媒质中的集肤效应。根据电磁波的频率，选择透入深度小的材料，制成有一定厚度(通常厚度 $h = 2\pi d$)的屏蔽罩。考虑到高频时，铁磁材料的磁滞损耗大，发热显著，对被保护装置不利，因此，常采用低磁导率的金属材料。实际上，在高频电磁场中，电场与磁场是相互依存的，所以，只要对两者之一进行屏蔽，另一个也将不复存在。一般情况下，采用非铁磁材料的屏蔽罩接地方法即可有效地屏蔽高频电场。

值得注意的是，任何屏蔽体由于其自身晶格结构，均可看作是一个具有一系列固有频率的分布系统，当需要屏蔽的电磁场的频率接近或等于屏蔽体的某一固有频率时，将发生谐振现象，屏蔽效能急剧下降，甚至于加强原激励场，因此，屏蔽时对此现象必须予以防止。

## 4.4 涡流及其应用

位于交变磁场中的导体，在其内部将产生与磁场交链的感应电流，由于感应电流自成闭合回路，又称涡流。涡流具有与传导电流相同的热效应和磁效应，在大多数电气设备中，力求减小涡流及其损耗，但同时，涡流也有其广泛的工业应用，如：感应加热、无损检测、金属淬火等。本节以变压器芯片为例，介绍涡流的计算与分析，然后综述有关涡流的工业应用。

### 4.4.1 铁心叠片中的涡流

工频、音频(30 Hz～3 kHz)变压器和交流电器的铁心通常均由相互绝缘的薄钢片叠成，以减少涡流损耗，如图 4-6(a)所示。以图 4-6(b)所示铁心中一薄钢片为例，由于 $h \gg a$，$l \gg a$，故钢片截面内磁感应强度沿 $z$ 轴方向，且是 $(x,t)$的函数，即 $\boldsymbol{B} = B_z(x,t)\boldsymbol{e}_z$。$\boldsymbol{E}(x,t)$、$\boldsymbol{J}(x,t)$位于 $xOy$ 平面上，现忽略感应电场沿 $x$ 方向的分量，则即归结为 $E_y(x,t)$和 $J_y(x,t)$，如图 4-6(c)所示。

设磁场随时间作正弦变化，且对 $y$ 轴呈对称分布。忽略位移电流，故铁心叠片中的涡流场可近似为 MQS 场，其磁感应强度 $\dot{B}_z$ 满足一维扩散方程，即

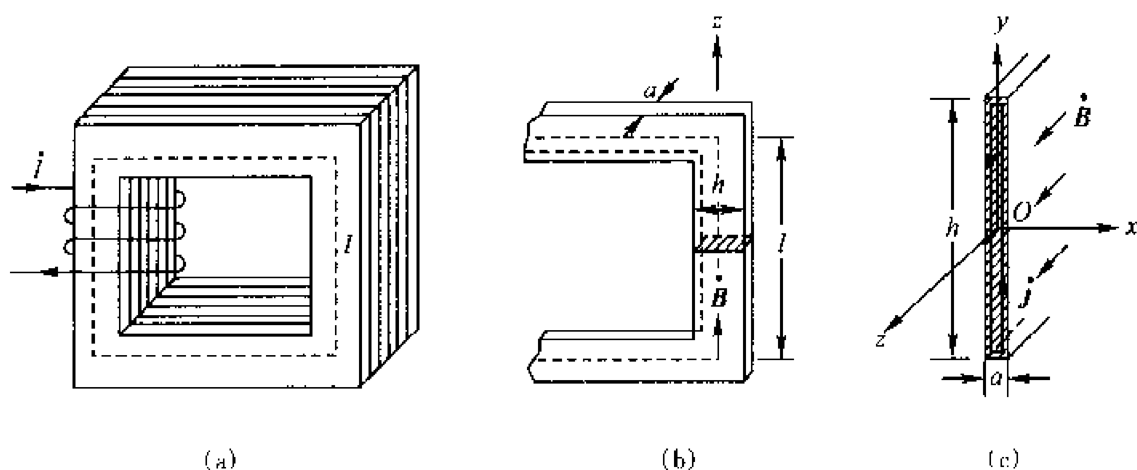



图 4-6　铁心叠片

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{B}_z}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{B}_z = P^2\dot{B}_z \tag{4-41}$$

通解为

$$\dot{B}_z = C_1\mathrm{e}^{-Px} + C_2\mathrm{e}^{Px}$$

根据磁场的对称性

$$\dot{B}_z\left(-\frac{a}{2}\right) = \dot{B}_z\left(+\frac{a}{2}\right)$$

显然，$C_1 = C_2 = \dfrac{C}{2}$，采用双曲函数可表示为

$$\dot{B}_z = C\cosh(Px) = \dot{B}_0\cosh(Px) \tag{4-42}$$

式中 $\dot{B}_0$ 是 $x=0$ 处的场量。由 $\nabla\times\dot{\boldsymbol{B}} = \mu\gamma\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{J}} = \gamma\dot{\boldsymbol{E}}$，有：

$$\dot{E}_y = -\frac{\dot{B}_0 P}{\mu\gamma}\sinh(Px) = \dot{E}_{y0}\sinh(Px) \tag{4-43}$$

$$\dot{J}_y = -\frac{\dot{B}_0 P}{\mu}\sinh(Px) = \dot{J}_{y0}\sinh(Px) \tag{4-44}$$

$\dot{B}_z$ 和 $\dot{J}_y$ 的模值分别为：

$$B_z = |\dot{B}_0|\sqrt{\frac{1}{2}[\cosh(2Kx) + \cos(2Kx)]} \tag{4-45}$$

和

$$J_y = |\dot{J}_{y0}|\sqrt{\frac{1}{2}[\cosh(2Kx) - \cos(2Kx)]} \tag{4-46}$$

式中 $K = \sqrt{\dfrac{\omega\mu\gamma}{2}}$。$B_z$，$J_y$ 随 $x$ 的变化曲线如图 4-7 所示。可以看出，磁场在

$x=0$平面上有最小值，这表明了涡流的去磁效应；涡流密度 $J_y$ 分布对 $y$ 轴呈奇对称，它密集于导体表面，在 $x=0$ 处为零。由此可见，电磁场量由表及里逐渐衰减，呈现集肤效应。

基于3.1节的讨论，在体积为 $V$ 的导体中消耗的平均功率，即涡流损耗为

$$P=\int_V \frac{J_y^2}{\gamma}\mathrm{d}V \qquad (4-47)$$

当频率较低时，根据式(4-46)、(4-44)和(4-42)，可以导出，消耗在铁心薄钢片中的涡流损耗为

$$P=\frac{1}{12}\gamma\omega^2 a^2 VB_{zav}^2 \qquad (4-48)$$

式中 $B_{zav}$ 是 $B_z$ 在 $\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$ 上有效值的平均值，$V$ 是薄片的体积。由此可见，涡流损耗与频率的平方成正比，也和 $\gamma$ 及 $a^2$ 成正比。通常频率是给定量，为了减小涡流损耗，应力求减小叠片厚度和电导率。硅钢片就是在铁中掺杂硅，以达到减小铁心钢片电导率的目的。应指出，低频时，去磁效应和磁的集肤效应虽并不明显，但涡流损耗较大。

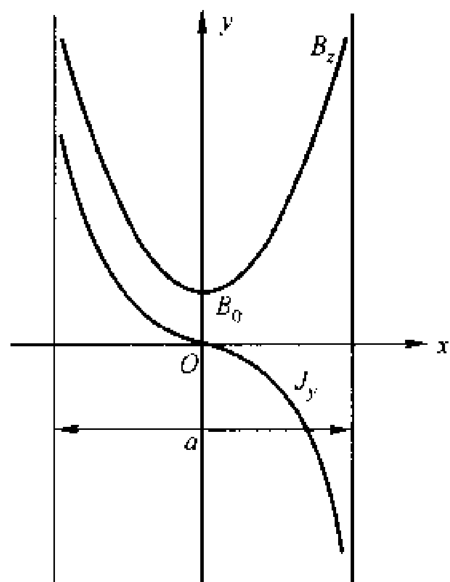



图4-7 铁心叠片中磁场、电流分布曲线

在高频情况下，磁导率随频率的增加而减少，因此，$B_{zav}$将减小。且因涡流的去磁效应，使中间磁场减弱，涡流分布呈趋于表面的集肤效应，导致涡流所经路径的交流电阻增大(相当于 $\gamma$ 减小)，因而涡流损耗将比低频时有所减少。

### 4.4.2 涡流的工业应用

1. 感应加热

置于强时变磁场中的导电媒质将感生涡流，由此产生的涡流损耗将生成大量的热，这就是感应加热的原理。

感应加热炉是利用电磁感应产生涡流来加热或熔化金属，这种炉子比普通燃煤或燃油炉能产生更高的温度，并有高效、节能等优异特性。所以冶金工业通常采用感应加热炉来熔化金属。

多种结构形式的感应加热器也是利用感应加热原理，以实现各类金属的热处理，如透热、淬火和退火等加工工艺处理。同样基于感应加热原理，若将需要烘干的胶合板放在电容器两极板之间，则当接通高频电源后，在胶合板中尚未干

燥的胶水层内将产生涡流，而后胶水即被其释放的热量烘干。

2. 金属管道无损检测

金属管道裂纹无损检测系统如图4-8(a)所示。在被测管道上绕有 $N$ 匝线圈，该线圈的输入阻抗由两部分组成，其虚部与线圈电感相关，实部则与管道的涡流损耗有关。当线圈通有交变电流时，管道上将产生环向涡流，如果管道有如图4-8(b)所示的纵向裂纹，那么，流经裂纹的涡流将被隔断，使得被测管道段的涡流损耗减少，而涡流损耗正比于线圈的输入电阻，因此，可以通过检测线圈的输入阻抗的实部来判断裂纹的位置。但是，这种检测线圈不能检测图4-8(c)所示的环向裂纹。也不能检测透入深度小的管道深处的裂纹。

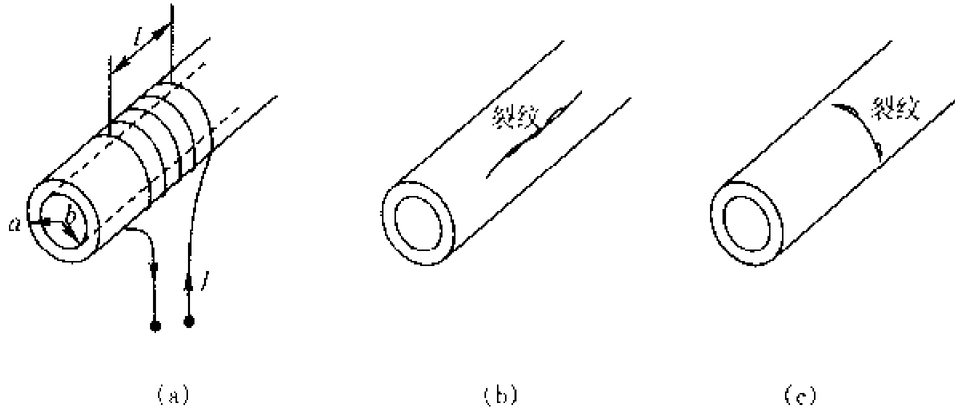



图4-8 管道无损检测

3. 电度表

测量工频电能的电度表通常为感应式测量机构，图4-9给出了单相电度表的基本机构。电度表有两个线圈，分别绕在两个铁心上，一个线圈与负载并联，称为电压线圈，产生的磁通 $\dot{\phi}_u$ 正比于电源电压；另一线圈与负载串联，称为电流线圈，产生的磁通 $\dot{\phi}_I$ 正比于负载电流。两个铁心之间放置一铝制转盘，另外还有支撑铝盘的转轴、用作制动元件的永久磁铁、积算机构等。

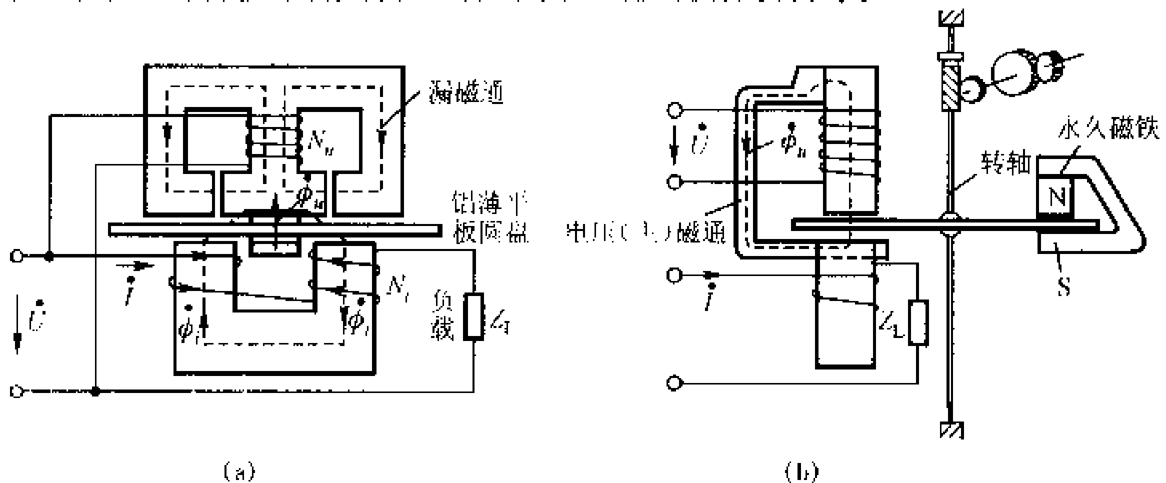



图4-9 电度表基本机构

电度表工作时，交变的 $\phi_u$ 和 $\phi_i$ 穿过铝盘，并在铝盘中产生环向涡流。$\phi_u$ 在铝盘上产生的感应电流 $i_u$，如图 4－10(a)所示，它与 $\phi_i$ 产生电磁力 $\boldsymbol{F}_1$；$\phi_i$ 在铝盘上产生的感应电流 $i_i$，如图 4－10(b)所示，它与 $\phi_u$ 产生电磁力 $\boldsymbol{F}_2$。$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 使铝盘产生转动力矩 $\boldsymbol{M}$，驱使铝盘转动。转动力矩与制动力矩平衡时，铝盘将以稳定的转速旋转，铝盘的转速正比于负载的有功功率。如果电度表设计合理，铝盘旋转的圈数与电能成正比。

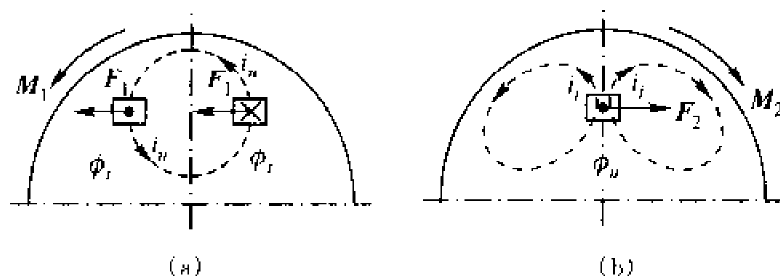



图 4－10　铝盘上的磁通、涡流及其电磁力

## 4.5　导电媒质中的磁扩散·磁屏蔽

若设定 $t=0$ 时刻，在空间 $V$ 中，突然建立恒定磁场，这时，位于该空间中的导电媒质因电磁感应必然产生感应电流，感应电流的去磁效应将使导电媒质内的磁场不会发生突变而仍保持零值。随着时间 $t$ 的增加，感应电流逐渐衰减为零，最终去磁效应消失，形成稳态的磁场分布，这一过程称为磁扩散(或磁弛豫)现象。

由于磁扩散现象发生在导体中，通常不考虑位移电流的作用，故归属为磁准静态场问题。本节以位于磁场中的导体薄壳为典型示例，说明磁扩散现象的物理本质，并进而阐明磁屏蔽的工程应用。

### 4.5.1　轴向磁场向导体壳内的扩散

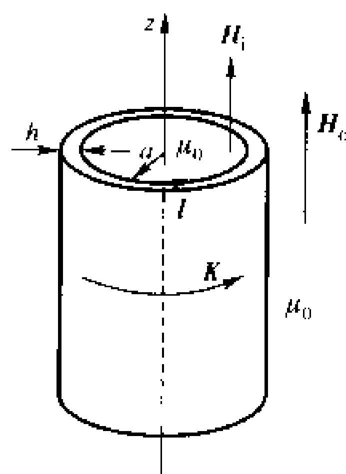
以圆柱形导体薄壳受轴向外磁场 $\boldsymbol{H}_0(t)$ 激励为例，设导体壳内半径为 $a$，薄壁厚度为 $h$，沿 $z$ 轴方向无限延展。今在 $t=0$ 时刻由外励磁源突然建立轴向恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$，这时，在该阶跃磁场激励下，导体壳上将感生感应电流，如图 4－11(a)所示。

根据分界面上的边界条件[式(4－10)]

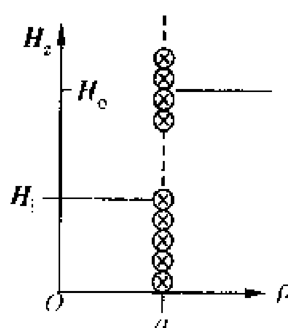
$$H_i - H_o = K \tag{4-49}$$

式中 $K$ 为导体壳内面电流密度，即感生的感应电流分布，其值为

$$K = hJ = h\gamma E \tag{4-50}$$




(a) 圆柱形导体薄壳




(b) 轴向外磁场 $H_o$ 向导体薄壳内扩散，建立壳内均匀轴向磁场 $H_i$ 的过渡过程

图 4-11　轴向磁场向导体壳内的扩散

根据电磁感应定律，在导体壳中取回路 $l$，如图 4-11(a)所示，得

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}_i}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由式(4-50)以 $E=\frac{K}{h\gamma}$ 代入上式，得

$$\oint_l \frac{K}{h\gamma}\mathrm{d}l = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}_i}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

再代入式(4-49)，有

$$\frac{1}{h\gamma}\oint_l (H_i - H_o)\mathrm{d}l = -\mu_0\pi a^2\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t}$$

由此即得关于 $H_i$ 的一阶非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{ah\mu_0\gamma}H_i=\frac{2H_o}{ah\mu_0\gamma} \tag{4-51}$$

显然，上述方程的特征根为

$$p = -\frac{2}{ah\mu_0\gamma} = -\frac{1}{\tau_m}$$

式中 $\tau_m$ 为磁扩散时间(或磁弛豫时间),即

$$\tau_m = \frac{1}{2}ah\mu_0\gamma \tag{4-52}$$

由于 $t=0$ 时,$H_i=0$,所以微分方程(4-51)的解为

$$H_i = H_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}) \tag{4-53}$$

而面电流密度

$$K = -H_o e^{-\frac{t}{\tau_m}} \tag{4-54}$$

导体壳内的磁场 $\boldsymbol{H}_i$ 是由外磁场 $\boldsymbol{H}_o$ 和感应电流 $\boldsymbol{K}$ 产生的磁场叠加而成。由式(4-53)、(4-54)分析结果可见,当 $t=0$ 时,$K=-H_o$,$H_i=0$,即导体壳内磁场仍保持原值为零;随着 $t$ 的增加,$K$ 按指数规律减小,而磁场 $H_i$ 按指数规律逐渐增大。对应于某一时刻的磁扩散的过渡过程示于图 4-11(b)。该磁扩散现象在持续若干个 $\tau_m$ 时间后将基本消失,在稳态下,导体壳内磁场与外磁场趋于相等,即 $\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{H}_o$。

### 4.5.2 横向磁场向导体壳内的扩散

若对圆柱形导体薄壳突然施加与导体壳轴线相垂直的恒定外磁场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_x$,如图 4-12 所示,则导体壳将产生流向为 $z$ 轴方向的感应电流,该感应电流在导体壳的端部闭合。由于感应电流的去磁效应,空腔内的磁场将从零过渡到 $\boldsymbol{B}_0$。这一磁扩散的过渡过程可由矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 予以描述。

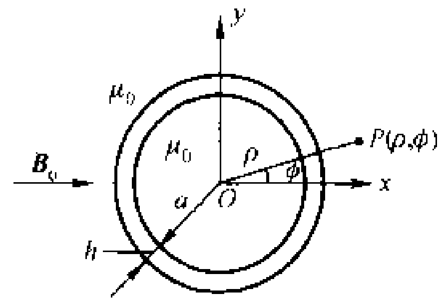



图 4-12 横向磁场向导体壳的扩散

本问题归属磁准静态场,基于式(4-7),现矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_{zi}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_{zi}}{\partial\phi^2} = 0 \quad (i = 1,2) \tag{4-55}$$

式中,设 $\rho \geqslant a$ 区域中,$A_{zi} = A_{z1}$;在 $0 \leqslant \rho < a$ 区域中,$A_{zi} = A_{z2}$。由式(2-90)可知,式(4-55)的通解为

$$A_{zi} = (C_i + D_i\ln\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_{in}\rho^n + D_{in}\rho^{-n})[E_{in}\cos(n\phi) +$$

$$F_{in}\sin(n\phi) | \quad (i = 1,2) \tag{4-56}$$

在 $\rho \geqslant a$ 区域中，由无限远处的边界条件：$\boldsymbol{B}_1|_{\rho\to\infty} = \boldsymbol{B}_o = \frac{\partial A_{z1}}{\partial y}\boldsymbol{e}_x$，可得 $A_{z1} = B_o\rho\sin\phi$，所以：

$$n = 1,\quad C_1 = D_1 = E_{11} = 0,\quad F_{11}C_{11} = B_o$$

令 $D_{11}F_{11} = F_1$，故通解为

$$A_{z1} = B_o\rho\sin\phi + \frac{F_1}{\rho}\sin\phi \tag{4-57}$$

在 $0 \leqslant \rho < a$ 区域中，设 $\rho = 0$ 处为矢量磁位参考点，即 $A_{z2}(0,t) = 0$，则有

$$C_2 = D_2 = D_{2n} = 0$$

又因在 $\rho = a$ 的分界面上，类比于 3.5.3 节的分析，应满足物理条件为 $A_{z1} = A_{z2}$，故 $n = 1, E_{21} = 0$。令 $C_{21}F_{21} = F_2$，得通解为

$$A_{z2} = F_2\rho\sin\phi \tag{4-58}$$

现继续由分界面上的边界条件及电磁感应定律来确定式(4－57)、(4－58)中的积分常数 $F_1$ 和 $F_2$。

1. 根据分界面上边界条件：$A_{z1}|_{\rho=a} = A_{z2}|_{\rho=a}$，可得

$$B_o a + \frac{F_1}{a} = F_2 a \tag{4-59}$$

2. 根据分界面上边界条件：应有 $H_{\phi1} - H_{\phi2} = K = h\gamma E_z$，并代入电磁感应定律 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} = -\frac{\partial B_\rho}{\partial t}$，得出

$$\frac{1}{h\gamma\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(H_{\phi1} - H_{\phi2}) = -\frac{\partial B_\rho}{\partial t} \tag{4-60}$$

由 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$，可将上式改写为

$$\frac{1}{h\gamma\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_{z1}}{\partial\rho} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_{z2}}{\partial\rho}\right)\bigg|_{\rho=a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_{z2}}{\partial\phi}\right)\bigg|_{\rho=a} \tag{4-61}$$

将式(4－57)、(4－58)代入上式，整理得

$$\frac{1}{ah\mu_0\gamma}\left(\frac{F_1}{a^2} + F_2 - B_o\right) = -\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t}$$

按式(4－59)，将 $F_1 = (F_2 - B_o)a^2$ 代入上式，即得关于 $F_2$ 的一阶非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{ah\mu_0\gamma}F_2 = \frac{2B_o}{ah\mu_0\gamma} \tag{4-62}$$

以上方程与方程(4－51)完全类同，故对应于 $t = 0$ 时，空腔内磁场为零，即 $F_2(0) = 0$ 的初始条件，该微分方程(4－62)的解为

$$F_2 = B_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}) \qquad (4-63)$$

式中 $\tau_m = \frac{1}{2}ah\mu_0\gamma$。将上式代入式(4-59),有

$$F_1 = -a^2 B_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}} \qquad (4-64)$$

将求得的积分常数 $F_1$、$F_2$ 回代入式(4-57)、(4-58),就可得出两区域中的矢量磁位分别为:

$$A_{z1} = B_0\rho\sin\phi - \frac{a^2B_0}{\rho}e^{-\frac{t}{\tau_m}}\sin\phi \quad (\rho \geqslant a) \qquad (4-65)$$

和

$$A_{z2} = B_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}})\rho\sin\phi \quad (0 \leqslant \rho < a) \qquad (4-66)$$

从而相应的磁感应强度分别为:

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\partial A_{z1}}{\rho\partial\phi}\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\partial A_{z1}}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi = B_0\boldsymbol{e}_x - \frac{a^2B_0}{\rho^2}e^{-\frac{t}{\tau_m}}(\boldsymbol{e}_\rho\cos\phi + \boldsymbol{e}_\phi\sin\phi)$$

$$(4-67)$$

和

$$\boldsymbol{B}_2 = B_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}})\boldsymbol{e}_x \qquad (4-68)$$

而面电流密度为

$$\boldsymbol{K} = -\frac{2B_0}{\mu_0}e^{-\frac{t}{\tau_m}}\sin\phi\,\boldsymbol{e}_z \qquad (4-69)$$

由式(4-67)—(4-69)可以看出,当横向磁场突然建立时,导体壳上感生的感应电流在导体壳内产生与 $\boldsymbol{B}_0$ 方向相反的去磁磁场,其特征是:在 $y>0$(即 $0<\phi<\pi$)的导体壳上电流流向为($-z$)轴方向,而在 $y<0$(即 $\pi<\phi<2\pi$)的导壳上则为 $z$ 轴方向。当 $t>(3\sim5)\tau_m$ 后,感应电流 $\boldsymbol{K}\approx0$,此时,趋于稳态,$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_0$,即磁扩散现象最终导致全空间的均匀磁场。

### 4.5.3 磁 屏 蔽

用作磁屏蔽的空心导磁圆柱形腔体如图 4-13 所示,腔体的磁导率为 $\mu$,内外半径分别为 $a$ 和 $b$。当将其突然移入横向恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 时,在初瞬间,将在铁磁体外圆柱表面的一个薄层中感生感应电流(集肤效应);然后,随着时间的推移,磁扩散现象逐渐延伸至铁磁体内部及其空腔之中。当 $t>(3\sim5)\tau_m$ 时,磁扩散趋近稳态,铁磁体内感应电流趋于零。由于腔体是铁磁材料,所以稳态下

$\boldsymbol{B}_0$ 不能全部透入腔体而部分地被屏蔽在铁磁腔体中。

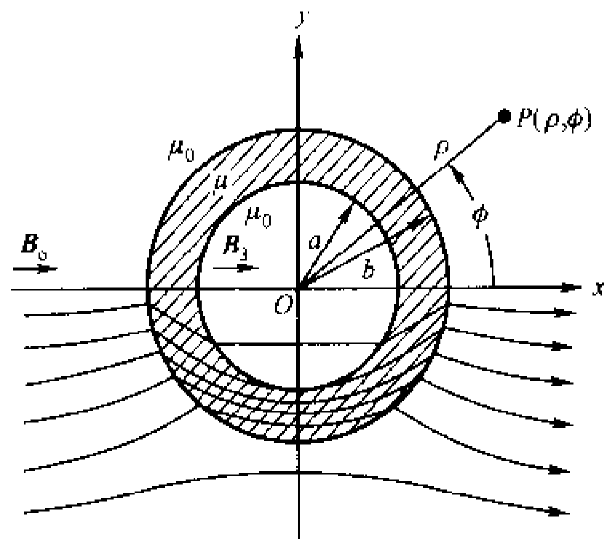



图 4-13 圆柱形磁屏蔽腔体

上述磁屏蔽过程可分析如下。首先,按媒质的不同特征,分别建立在三个区域中的拉普拉斯方程,并采用与 4.5.2 节相同的分析方法,可得相应矢量磁位的通解为:

$$A_{z1} = B_0\rho\sin\phi + \frac{F_1}{\rho}\sin\phi \qquad (\rho \geqslant b) \tag{4-70}$$

$$A_{z2} = F_2\rho\sin\phi + \frac{F_3}{\rho}\sin\phi \qquad (b < \rho \leqslant a) \tag{4-71}$$

$$A_{z3} = F_4\rho\sin\phi \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant a) \tag{4-72}$$

然后,利用不同媒质分界面上的边界条件,以及电磁感应定律,逐一决定式(4-70)—(4-72)中各个积分常数。

1. 由分界面上的边界条件: $A_{z2}\big|_{\rho=a} = A_{z3}\big|_{\rho=a}$ 及 $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_{z2}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a} = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\partial A_{z3}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}$,可得:

$$F_2 + \frac{F_3}{a^2} = F_4 \tag{4-73}$$

和

$$\frac{1}{\mu_0}F_4 = \frac{1}{\mu}\left(F_2 - \frac{F_3}{a^2}\right) \tag{4-74}$$

同理,由 $A_{z1}\big|_{\rho=b} = A_{z2}\big|_{\rho=b}$ 得到

$$B_0 b + \frac{F_1}{b} = F_2 b + \frac{F_3}{b} \tag{4-75}$$

2. 与式(4－60)的推导过程类似,由 $H_{\phi 1}-H_{\phi 2}=h\gamma E_z$ 可得

$$\frac{1}{h\gamma}\left[\frac{1}{\mu}\left(F_2-\frac{F_3}{b^2}\right)-\frac{1}{\mu_0}\left(B_o-\frac{F_1}{b^2}\right)\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\left(F_2 b+\frac{F_3}{b}\right) \tag{4－76}$$

从式(4－73)—(4－76)中消去 $F_1\sim F_3$,即得关于 $F_4$ 的一阶非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}t}+\frac{b^2(1+\mu_r)^2-a^2(1-\mu_r)^2}{\mu h\gamma b\left[b^2(1+\mu_r)+a^2(1-\mu_r)\right]}F_4=\frac{4B_o b}{\mu_0 h\gamma\left[b^2(1+\mu_r)+a^2(1-\mu_r)\right]} \tag{4－77}$$

方程的特征根为

$$p=-\frac{1}{\mu h\gamma b}\cdot\frac{b^2(1+\mu_r)^2-a^2(1-\mu_r)^2}{b^2(1+\mu_r)+a^2(1-\mu_r)}=-\frac{1}{\tau_m}$$

式中 $\tau_m$ 为磁扩散时间,即

$$\tau_m=\mu h\gamma b\frac{b^2(1+\mu_r)+a^2(1-\mu_r)}{b^2(1+\mu_r)^2-a^2(1-\mu_r)^2} \tag{4－78}$$

由于 $t=0$ 时,空腔内磁场为零,即 $F_4(0)=0$,所以

$$F_4=\frac{4B_o\mu_r}{(1+\mu_r)^2-\frac{a^2}{b^2}(1-\mu_r)^2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right) \tag{4－79}$$

将 $F_4$ 代入式(4－72),就可得出空腔内的矢量磁位 $A_{z3}$,然后,由 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$,即可算得该区域磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_3=\frac{\partial A_{z3}}{\rho\partial\phi}\boldsymbol{e}_\rho-\frac{\partial A_{z3}}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi=F_4\boldsymbol{e}_x=\frac{4B_o\mu_r}{(1+\mu_r)^2-\frac{a^2}{b^2}(1-\mu_r)^2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right)\boldsymbol{e}_x \tag{4－80}$$

当 $t=0$ 时,$\boldsymbol{B}_3=0$,表明在突然建立磁场时,圆柱空腔内的磁场仍保持原值为零。当 $t>(3\sim5)\tau_m$ 时,磁场经过磁扩散的过渡过程后趋于稳态,此时,磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_3=\frac{4B_o\mu_r}{(1+\mu_r)^2-\frac{a^2}{b^2}(1-\mu_r)^2}\boldsymbol{e}_x \tag{4－81}$$

若腔体为铁磁材料,则因其相对磁导率 $\mu_r\gg1$,上式可简化为

$$\boldsymbol{B}_3=\frac{4B_o}{\mu_r\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}\boldsymbol{e}_x \tag{4－82}$$

显然,磁屏蔽材料的相对磁导率 $\mu_r$ 愈大,或屏蔽层越厚($a/b$ 比值愈小),则屏蔽效能越佳。图 4－13 的下半部即绘出稳态时圆柱形铁磁腔体磁屏蔽效果的示意图。

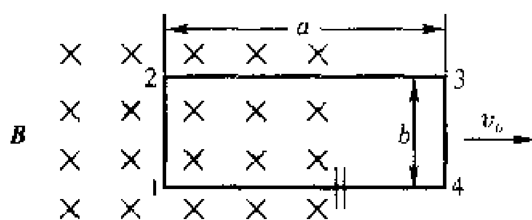
# 习　题

**4-1**　电阻率为 $\rho$，半径为 $R$ 的导线构成一面积为 $a\times b$ 的矩形回路，它的一部分位于恒定磁场（磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$）中，如题 4-1 图所示。已知该回路以恒定速度 $v_0$ 向右移动，求：

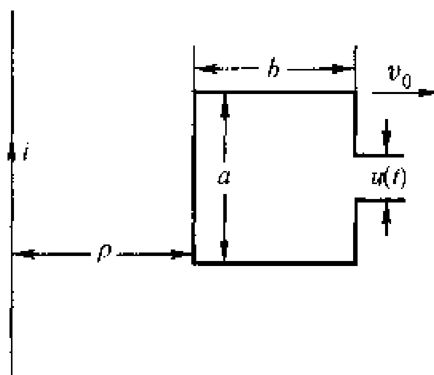
（1）回路中的感应电动势；

（2）移动时，回路所受的机械力；

（3）如回路断开（如图所示），求开路电压。




题 4-1 图




题 4-2 图

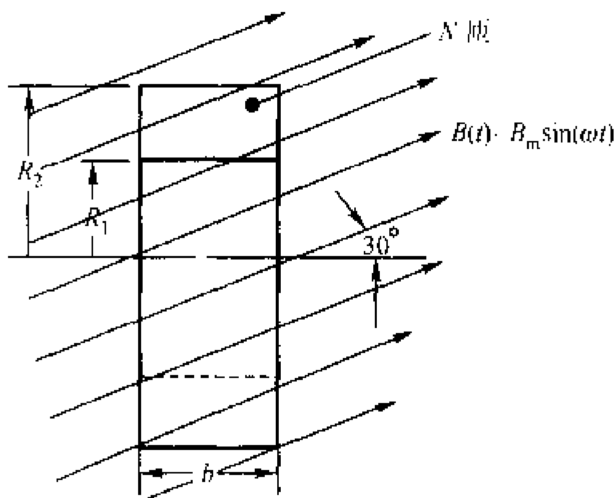
**4-2**　设有一断开的矩形线环位于一长直导线的近旁，见题 4-2 图。

（1）设 $i=I_m\cos(\omega t)$，确定开路电压并说明其极性［设矩形环的尺寸远小于自由空间中的与 $\boldsymbol{B}(\omega)$ 有关的波长］；

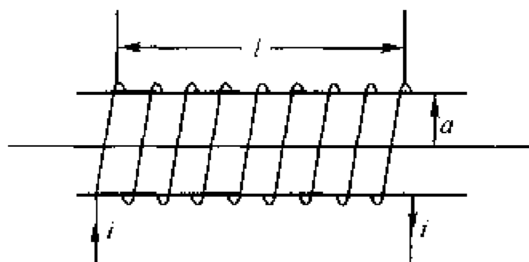
（2）设 $i$ 为直流电，但回路以 $v_0$ 向右移动，试决定其开路电压并指明其极性；

（3）若导线中通有电流 $i=I_m\cos(\omega t)$，线环又向右以速度 $v_0$ 运动，重新决定 $u(t)$。

**4-3**　应用感应电动势法测试磁场的探测线圈（圆柱形的小线圈），以图所示方位放置于均匀的工频磁场 $B(t)=B_m\sin(\omega t)$ 中，探测线圈匝数为 $N$，几何尺寸如题 4-3 图所示。求探测线圈中的感应电动势值（有效值）。




题 4-3 图



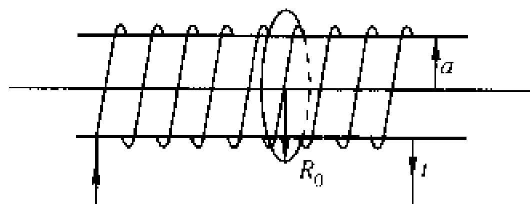

题 4-4 图

**4－4** 一均匀绕制(每单位长度为 $N$ 匝)的细长螺管线圈,螺管的半径为 $a$,且 $a \ll l$(螺管的长度),如题 4－4 图所示。已知线圈中通有缓变电流 $i = I_m \sin(\omega t)$。求:

(1) 螺管线圈内外的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(t)$;

(2) 螺管线圈内外任意点的感应电场强度。

**4－5** 上题中,若另有一匝闭合导线与螺管线圈同轴放置,其半径为 $R_0$,内阻为 $r$,电感可忽略不计(参阅题 4－5 图)。求闭合导线中的感应电流 $i(t)$并作出相应的曲线。




题 4－5 图

**4－6** 若上题中单匝导线不闭合,如题 4－6 图所示,求开口处的电压 $u_{AB}(t)$。

**4－7** 设在半径分别为 $a$ 和 $b$ 的两个同心球之间充满着理想电介质,其介电常数为 $\varepsilon = \epsilon_0$,两球间接有交变电压 $u = U_m \sin(\omega t)$。

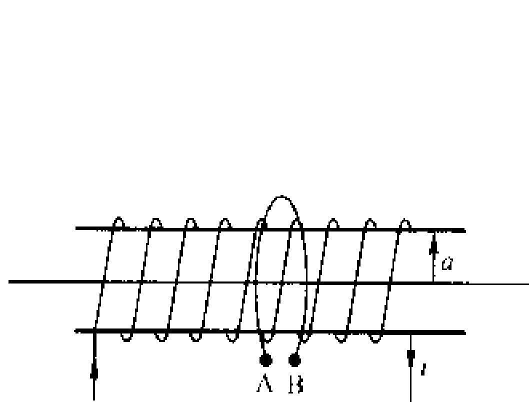
(1) 应用位移电流密度的定义,求通过介质中任意点的位移电流密度;

(2) 应用交流电路的方法计算两球间任意点间的位移电流密度。

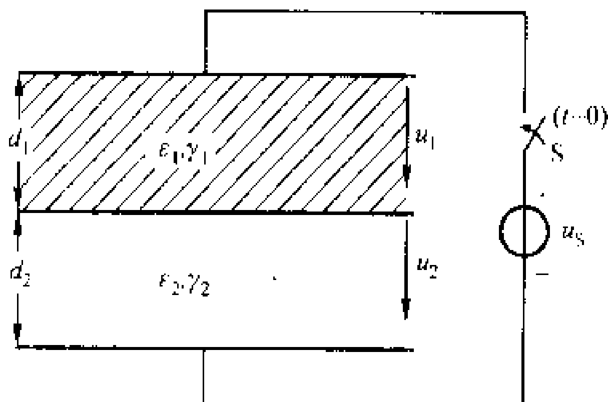
**4－8** 设一平板电容器由两层有损介质串联构成,如题 4－8 图所示。其介电常数和电导率分别为 $\varepsilon_1$、$\gamma_1$ 和 $\varepsilon_2$、$\gamma_2$,厚度分别为 $d_1$ 和 $d_2$。设 $t = 0$ 时开关 S 闭合,接通直流电压源 $u_S$。基于 4.2.2 节的讨论,求:

(1) 施加于两层有损介质上的电压 $u_1(0_+)$, $u_2(0_+)$ 和 $u_1(\infty)$, $u_2(\infty)$;

(2) 分别画出对应于 $t = 0_+$ 和 $t = \infty$ 时刻的等值电路图。




题 4－6 图




题 4－8 图

# 第 5 章

# 动态电磁场与电磁波

麦克斯韦方程组奠定了研究电磁现象的数学基础，全面概括了电磁现象的基本规律和特性。以麦克斯韦方程组在动态电磁场与电磁波工程中的应用原理与方法为论题，本章首先研究了动态电磁场的一般规律，包括边界条件、坡印廷矢量、电磁位和电磁场所满足的控制方程；其次，对工程应用最普遍的时谐电磁场进行了深入研究，主要内容有：天线的电磁辐射特性（线天线和天线阵、天线的方向图、天线的互易性和电磁波频谱等）；均匀平面电磁波在理想介质和有损媒质中的传播特性（波矢量、反射与折射、琼斯矢量和琼斯矩阵、波的极化和各向异性介质中的电磁波等）；导引电磁波（非均匀平面电磁波、平行板波导、矩形波导和谐振腔等）。

## 5.1 动态电磁场

麦克斯韦方程组描述了宏观电磁现象。当电磁场随时间迅速变化时，即在高频电磁场范畴内，必须同时考虑由于磁场变化$\left(-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$产生的感应电场；以及由于电场变化$\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$产生的感应磁场。这时，时变电场和时变磁场是相互依存又相互制约的。这种相互作用和相互耦合的时变电磁场通常被称为动态电磁场。当动态电磁场以电磁波动的形式在场域空间传播时，即被称为电磁波。

在静止媒质中，描述动态电磁场的麦克斯韦方程组已由方程(1－85a)—(1－85d)给出。现重列于下：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5－1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5－1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5－1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{5－1d}$$

媒质特性的构成方程组为：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5-2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5-3}$$

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} \tag{5-4}$$

一般而言，反映媒质特性的三个参数 $\varepsilon$、$\mu$ 和 $\gamma$ 与动态电磁场的工作频率有关。如在 200 MHz 以下时，水的相对介电常数约为 80，而在光频时则减小到 1.75。本书假设它们在一定频率范围内均为常数。

### 5.1.1 动态电磁场的边界条件

与静态和准静态电磁场一样，在分析由不同媒质构成的无界空间或有界空间中的动态电磁场时，其数学模型的构造除给出场域内麦克斯韦方程组外，还必须给定边界条件。

通过准静态电磁场中相应的推导已经知道，只要$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$或$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$在媒质分界面上是有限的，其边界条件同于静态电磁场的边界条件。事实上，在动态电磁场中，媒质分界面上的$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$和$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$仍为有限量。因此，可以直接引用准静态电磁场边界条件的结论，获得以下在不同媒质分界面上的动态电磁场的边界条件：

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{5-5}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{5-6}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{5-7}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{5-8}$$

由式(5-5)—(5-8)可以看出，在不同媒质分界面上，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量总是连续的，而 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量和 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量只有在媒质分界面上不存在传导电流和自由电荷时才是连续的。

在理想导体内，由于 $\gamma \to \infty$ 且 $\boldsymbol{J}$ 是有限的，由式(5-4)可知 $\boldsymbol{E}=0$。再根据式(5-1b)，进一步可见在理想导体内也不存在随时间变化的磁场。这样，基于式(5-5)—(5-8)，在理想导体(设为媒质 1)与介质(设为媒质 2)交界面上的边界条件为：

$$H_{2t} = -K \tag{5-9}$$

$$E_{2t} = 0 \tag{5-10}$$

$$B_{2n} = 0 \tag{5-11}$$

$$D_{2n} = \sigma \tag{5-12}$$

式中所规定的交界面上 $\boldsymbol{e}_n$ 的指向，也就是理想导体表面的外法线方向。上述边

界条件表明，电场线垂直于理想导体表面，而磁场线沿着理想导体表面分布。

对于图 5－1 所示的理想导体，如果沿其表面闭合路径 $l$ 对式(5－9)积分，得

$$
\begin{aligned}
\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}l &= \oint_l (\boldsymbol{e}_{tK} \times \boldsymbol{e}_n)\mathrm{d}l \cdot \boldsymbol{H} \\
&= \oint_l (\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{e}_{tK}\mathrm{d}l \\
&= \oint_l [\boldsymbol{e}_n \times (-\boldsymbol{e}_t)H] \cdot \boldsymbol{e}_{tK}\mathrm{d}l \\
&= \oint_l (\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n)H \cdot \boldsymbol{e}_{tK}\mathrm{d}l \\
&= \oint_l \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{e}_{tK}\mathrm{d}l
\end{aligned}
$$

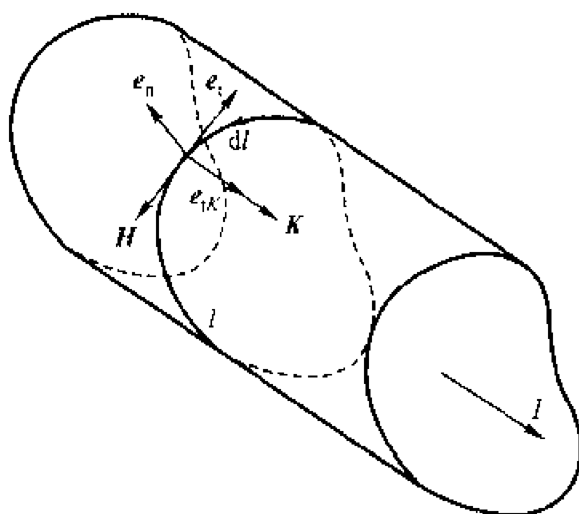



图 5－1　理想导体的表面电流 **K**

这是以理想导体表面电流形式表达的安培环路定律。在分析动态电磁场问题时，理想导体的总电流 $I$ 常用其表面上的面电流密度 **K** 如上等效表示之。应该指出，实际上并不存在理想导体。但是，当场源激励频率很高时，对于电导率很高的良导体，由于集肤效应，使时变电磁场分布趋于表面，此时，工程上，可将该良导体近似处理为理想导体。

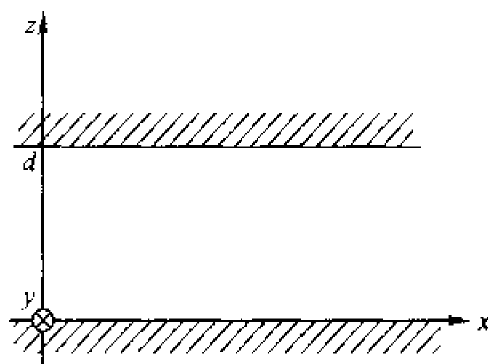



图 5－2　两无限大理想导体平板

**例 5－1**　在图 5－2 所示两无限大理想导体平板间的无源自由空间中，动态电

磁场的磁场强度为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y H_0 \cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos(\omega t - \beta x)$，式中 $\beta$ 为常数。试求：(1) 板间时变的电场强度；(2) 两导体表面时变的面电流密度和电荷面密度。

［解］ (1) 由式(5－1a)和(5－2)，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}\left(-\boldsymbol{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}\right)$$

故所求时变电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\int\left(-\boldsymbol{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{H_0}{\omega\epsilon}\left[\boldsymbol{e}_x \frac{\pi}{d}\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin(\omega t - \beta x) - \boldsymbol{e}_z \beta\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos(\omega t - \beta x)\right]$$

应指出，根据题意，在以上解答中并未计及与初始和边界条件相关的非时变的积分常数。

(2) 由边界条件[式(5－9)和(5－12)]，且在 $z=0$ 的导体表面上，$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_z$，得：

$$\boldsymbol{K} = -(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{e}_x H_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\sigma = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\beta}{\omega} H_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

在 $z = d$ 的导体表面上，$\boldsymbol{e}_n = -\boldsymbol{e}_z$，得：

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{e}_x H_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\sigma = -\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\beta}{\omega} H_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

### 5.1.2 有损媒质的复数表示

前面讨论中涉及的媒质，如理想介质和理想导体，纯属理想化的处理。实际上，一方面导体的电导率是有限的；另一方面介质是有损耗的(如电极化损耗、或磁化损耗、或欧姆损耗等)。

对于时谐电磁场中介电常数为 $\varepsilon'$ 的导电媒质，利用式(5－2)和(5－4)，可得：

$$\begin{aligned}\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}} &= \mathrm{j}\omega\left(\varepsilon' - \mathrm{j}\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{\boldsymbol{E}} \\ &= \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}\end{aligned} \tag{5-13}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{D}} = \left(\varepsilon' - \mathrm{j}\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{\boldsymbol{E}} \tag{5-14}$$

由上式可见，这类有损媒质的欧姆损耗是以负虚数形式反映在媒质的构成方程

中。类似地,为表征存在电极化损耗的有损电介质的极化性能可以定义如下复介电常数

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'' \tag{5-15}$$

同样,为表征有损磁介质的磁化性能也可以定义如下复磁导率

$$\tilde{\mu} = \mu' - \mathrm{j}\mu'' \tag{5-16}$$

$\tilde{\varepsilon}$ 和 $\tilde{\mu}$ 的实部,即 $\varepsilon'$ 和 $\mu'$,是通常所指在时谐电磁场作用下的介电常数和磁导率,并由此可分别表征和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 与 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 同相的 $\dot{\boldsymbol{B}}$ 与 $\dot{\boldsymbol{D}}$ 的分量的大小;而虚部($\varepsilon''$ 和 $\mu''$)则分别表征电介质中的电极化损耗与磁介质中的磁化损耗。在高频时谐电磁场中,$\varepsilon'$、$\varepsilon''$、$\mu'$ 和 $\mu''$ 通常是频率的函数。

当电介质同时存在电极化损耗和欧姆损耗时,其等效复介电常数可写为

$$\tilde{\varepsilon}_e = \varepsilon' - \mathrm{j}\left(\varepsilon'' + \frac{\gamma}{\omega}\right) \tag{5-17}$$

工程上引入电介质损耗角表征电介质中损耗的特性,并采用损耗角的正切,即

$$\tan\delta = \frac{\varepsilon'' + \dfrac{\gamma}{\omega}}{\varepsilon'} \tag{5-18}$$

$\varepsilon'$ 和 $\tan\delta$ 是在时谐电磁场中表征电介质特性的两个重要参数。工程上,称 $\tan\delta \ll 1$ 的介质为低损耗介质。显然,$\tan\delta$ 愈小,介质的绝缘特性愈好。通过测量电气设备的 $\tan\delta$ 可以检验设备的绝缘缺陷,如绝缘受潮、老化等。反之,$\tan\delta \gg 1$ 的媒质被称为良导体。在微波炉中,微波频率为 2.45 GHz,面食的 $\tan\delta$ 约为 0.073,菜和肉的 $\tan\delta$ 更高,而包装用的聚苯乙烯泡沫材料的 $\tan\delta$ 仅为 $3\times10^{-5}$,所以包装盒中的食品得以加热,而包装盒几乎不从微波中获取能量。

## 5.2 电磁场能量·坡印廷定理

通过静态电磁场的学习已经知道,电磁能量分别以电场和磁场形式存储在场域空间内,且在恒定电场中导电媒质吸收的电功率以焦耳热形式体现。对于动态电磁场,电磁能量仍然遵从能量守恒原理。事实上,由麦克斯韦方程组即可导出动态电磁场能量守恒关系。

由式(3-8)可知,在单位体积内,动态电磁场在导电媒质中消耗的电功率为 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{H} - \dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$,利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$,上式可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} &= -\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \\ &= -\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\end{aligned} \tag{5-19}$$

对于满足式(5－2)和(5－3)的媒质，上式等号右边的前两项可分别写为：

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)=\frac{\partial w_e}{\partial t}$$

同理

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)=\frac{\partial w_m}{\partial t}$$

将以上两式代入式(5－19)，得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m)-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\tag{5-20}$$

将上式两边对任意闭合曲面 $S$ 包围的体积 $V$ 求积，并由散度定理[式(1－41)]，得

$$\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(w_e+w_m)\mathrm{d}V-\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_e+W_m)-P$$

上式可改写为

$$-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_e+W_m)+P\tag{5-21}$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，由上式并结合量纲分析可知，$\boldsymbol{S}(\mathrm{W/m^2})$* 表征了单位时间内穿过单位面积的电磁能量。因此，式(5－21)的物理意义是，动态电磁场中，单位时间内穿过闭合面 $S$ 流入体积 $V$ 的电磁能量等于该体积内电磁场能量 $W(=W_e+W_m)$的增加率和电磁能量的消耗率。显然，式(5－21)反映了动态电磁场的能量守恒和功率平衡关系。式(5－21)被称为坡印廷定理的积分形式，而式(5－20)则被称为坡印廷定理的微分形式。

可以看出，矢量 $\boldsymbol{S}$ 不仅表征了穿过单位面积上的电磁功率，还确定地描述了该电磁功率流的空间流动方向。这一电磁功率流面密度矢量，被称为坡印廷矢量，即

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\tag{5-22}$$

基于坡印廷矢量，可以对动态电磁场的功率和能量传播进行计算和分析。

对于时谐电磁场，导电媒质吸收的复功率体密度为

$$\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}^*=\dot{\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}^*+\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}^*)$$

式中“ * ”号表示对复矢量取共轭运算。仿照式(5－19)的推导过程，可得

---

* 请注意区分坡印廷矢量与面积。

$$\nabla \cdot (\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*) = -\dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{J}}^* - \mathrm{j}\omega(\dot{\boldsymbol{B}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^* - \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}^*) \tag{5-23}$$

这就是时谐电磁场坡印廷定理的微分形式，其积分形式为

$$-\oint_S (\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V [\dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{J}}^* + \mathrm{j}\omega(\dot{\boldsymbol{B}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^* - \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}^*)]\mathrm{d}V \tag{5-24}$$

由上式可以再次看出，体积 $V$ 吸收的复功率由流入该体积表面 $S$ 的复矢量 $\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*$ 的通量所提供。

对于有损媒质，由式(5-4)、式(5-15)—(5-16)，式(5-24)可以写为

$$-\oint_S (\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V [(\gamma E^2 + \omega\varepsilon'' E^2 + \omega\mu'' H^2) + \mathrm{j}\omega(\mu' H^2 - \varepsilon' E^2)]\mathrm{d}V$$

上式右端实部表示体积 $V$ 内有损媒质吸收的有功功率 $P$(平均功率)，它不仅包含传导电流产生的欧姆损耗，还包含了媒质的极化和磁化损耗；右端虚部表示体积 $V$ 内吸收的无功功率 $Q$，既包含磁场(感性)无功功率，也包含电场(容性)无功功率。

在时谐电磁场中，对应于式(5-22)，由式(5-24)，可定义复坡印廷矢量为

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^* \tag{5-25}$$

容易证明，复坡印廷矢量的实部，即媒质吸收的有功功率密度等于电磁功率流面密度矢量的平均值

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*] \tag{5-26}$$

在以上关于时谐电磁场能量、功率分析的基础上，可以建立与正弦交流电路功率平衡之间的对应关系，并可进而基于场的分析，计算等值的电路参数。

**例 5-2** 直流电压源 $U_0$ 经图 5-3 所示的同轴电缆，向负载电阻 $R$ 供电。设该电缆内导体半径为 $a$，外导体的内、外半径分别为 $b$ 和 $c$。试用坡印廷矢量分析其能量的传输过程。

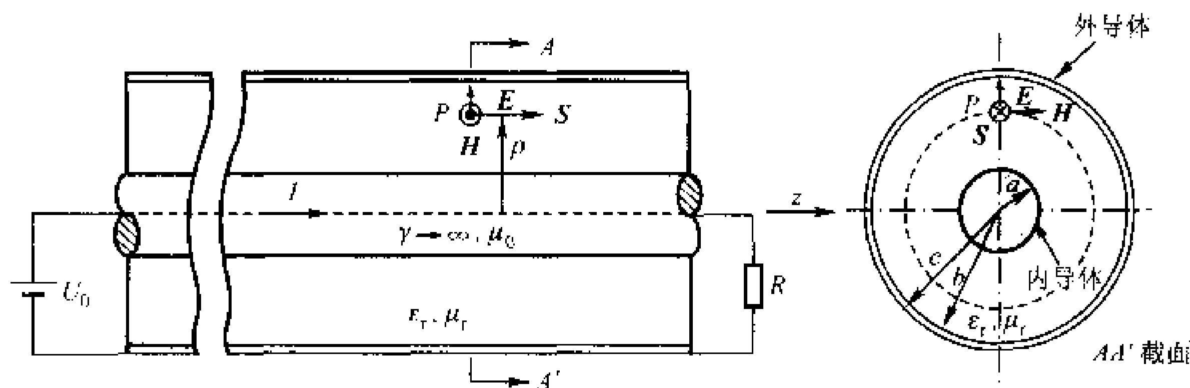



图 5-3 同轴电缆横截面中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的分布

［解］ 设同轴电缆导体为理想导体，内导体电位为 $U_0$，电流 $I=U_0/R$ 沿 $z$ 轴方向流动；外导体电位为零，其内流通的电流与内导体电流反向。由此可以求出同轴电缆内外电、磁场分别为：

$$
\boldsymbol{E}=\begin{cases} 0 & 0\leqslant\rho<a \\ \dfrac{U_0}{\rho\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\boldsymbol{e}_\rho & a\leqslant\rho\leqslant b \\ 0 & b<\rho<c \\ 0 & \rho>c \end{cases},\qquad
\boldsymbol{H}=\begin{cases} \dfrac{U_0}{2\pi a^2R}\rho\boldsymbol{e}_\phi & 0\leqslant\rho<a \\ \dfrac{U_0}{2\pi R\rho}\boldsymbol{e}_\phi & a\leqslant\rho\leqslant b \\ \dfrac{U_0}{2\pi R\rho}\left(1-\dfrac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\boldsymbol{e}_\phi & b<\rho<c \\ 0 & \rho\geqslant c \end{cases}
$$

不难看出，除同轴电缆内外导体间的坡印廷矢量

$$
\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{U_0^2}{2\pi R\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\cdot\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{e}_z \qquad (a\leqslant\rho\leqslant b)
$$

不为零外，其余各处均为零。因而对同轴电缆截面求积分，即得同轴电缆传输的功率为

$$
P=\oint_S\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{+\infty}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_z2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\int_a^b\frac{U_0^2}{2\pi R\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\cdot\frac{2\pi}{\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{U_0^2}{R}
$$

显然，这与电路理论获得的结果相同。

从以上分析计算可见，坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 仅存在于同轴电缆的内外导体之间的空间，且垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 组成的平面，如图 5－3 所示。这说明电磁能量是以电磁场方式通过空间传输给负载的，而不是像人们直观臆断的那样，是以电流为载体通过导体传送给电阻的。应指出，导体的作用仅在于建立空间的电磁场、并从电源定向导引电磁能量输入负载。

## 5.3 电磁位

在静态电磁场中，通过引入位函数作为辅助场量，在很大程度上简化了问题的计算。同样，在动态电磁场中，也可以定义一些辅助的位函数，以简化麦克斯韦方程组的求解。

### 5.3.1 电磁位·洛伦兹规范

类似于恒定磁场，由式(5－1c)定义如下称为动态矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的辅助矢量函数

$$
\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (5-27)
$$

代入式(5-1b),得

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

上式括号中矢量的无旋性,可导致定义一个称为动态标量位 $\varphi$ 的辅助标量函数

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \tag{5-28}$$

$A$、$\varphi$ 的单位分别为韦/米(Wb/m)和伏(V)。由式(5-27)和(5-28)定义的位函数组 $A-\varphi$ 被称为动态电磁场的电磁位。值得指出的是,上述位函数组的定义并不是惟一的,人们也可以根据具体问题的需要,定义其他的位函数组。

根据场论知道,仅由式(5-27)定义的 $A$ 并不是惟一的。也就是说,除规定 $A$ 的旋度外,还必须同时规定 $A$ 的散度才能惟一地确定 $A$。在恒定磁场中曾取库仑规范 $\nabla \cdot A = 0$,在动态电磁场中现作如下讨论:

将式(5-27)和(5-28)代入式(5-1a)和(5-1d),并利用式(5-2)和(5-3),可得:

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot A + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu J \tag{5-29}$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5-30}$$

从以上两个二阶偏微分方程不难看出,对 $A$ 的散度规范不同,方程组的形式也将不同。如取库仑规范,尽管式(5-30)转化为较为简单的泊松方程,但在式(5-29)的矢量方程中依然存在着 $A$ 与 $\varphi$ 的耦合。但如取式(5-29)中梯度项为零,即令 $A$ 的散度规范为

$$\nabla \cdot A = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{5-31}$$

则式(5-29)和(5-30)转化为:

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \tag{5-32}$$

和

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5-33}$$

式(5-31)称为洛伦兹规范。采用这一规范后,不仅解耦使 $A$ 和 $\varphi$ 分离在两个方程中,而且也惟一地确定了 $A$。

### 5.3.2 非齐次波动方程

采用洛伦兹规范[式(5-31)]后,$A$ 和 $\varphi$ 的二阶偏微分方程形式简洁、便于

求解。式(5-32)和(5-33)被称为电磁位的非齐次波动方程,又称为达朗贝尔方程。

对于时谐电磁场,采用复矢量表示法,电磁位的非齐次波动方程[式(5-32)、(5-33)]的复数(有效值)形式即为:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}} \tag{5-34}$$

$$\nabla^2 \dot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}}{\epsilon} \tag{5-35}$$

式中

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \tag{5-36}$$

称为波数,单位为弧度/米(rad/m),其物理含义将在后面阐述。式(5-34)和(5-35)又被称为非齐次亥姆霍兹方程。

对于非齐次波动方程,无论是式(5-32)和(5-33)的时域形式,还是式(5-34)和(5-35)的频域形式,在动态电磁场问题中占有重要的地位。可以说,动态电磁场的产生、辐射、传播和接收的分析都是围绕非齐次(或齐次)波动方程的求解进行的。

### 5.3.3 电磁位的积分解

直接求解非齐次波动方程涉及较深的数学知识,这里采用类比的方法,由所熟知的静态场结果,推出其解答。首先推导动态标量位函数方程(5-33)的解,令 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$,该方程可重写为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{5-37}$$

这是线性方程,因此,可先求位于坐标原点的时变元电荷 $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$ 产生的标量位,然后,基于叠加原理,可推出任意分布的时变体电荷的标量位函数解。

对于时变元电荷 $\mathrm{d}q$ 而言,其场分布具有球对称特征,即 $\varphi(\boldsymbol{r},t) = \varphi(r,t)$ 仅为球坐标变量 $r$ 的函数。故在除坐标原点以外的整个无源空间,位函数 $\varphi$ 满足方程

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

即

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} \qquad (0 < r < \infty) \tag{5-38}$$

上式为函数($r\varphi$)的一维齐次波动方程。由直接代入法可以证明,其通解为

$$r\varphi = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right) \tag{5-39}$$

由后述分析可知,在无界空间中,上式右端第二项不符合实际的物理条件,应舍去。因此,位于原点的时变电荷产生的标量位为

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \tag{5-40}$$

式中函数 $f_1$ 取决于场域中的媒质和 $\mathrm{d}q$ 的变化形式。当 $\mathrm{d}q$ 与时间无关时,即为静电场,这时它所产生的电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon r} \tag{5-41}$$

将上式与式(5-40)相比较,可见函数 $f_1$ 应表示为

$$f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon}\mathrm{d}V$$

代入式(5-40),即得位于原点的时变元电荷 $\mathrm{d}q$ 产生的标量位为

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V \tag{5-42}$$

式中 $r$ 为元体积 $\mathrm{d}V$ 至场点的距离。

若元电荷 $\mathrm{d}q$ 不在原点,而位于 $\boldsymbol{r}'$ 点,则令 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 为源点到场点的距离,可得其标量位

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V \tag{5-43}$$

由此可知,位于场域 $V'$ 中的任意体分布电荷 $\rho(\boldsymbol{r}',t)$,在场点 $\boldsymbol{r}$ 处产生的标量位可由上式积分求得

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'} \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{5-44}$$

观察式(5-44)的积分解可见,在动态电磁场中,动态标量位的积分解与静电场电位的积分解形式相似,但在时间上是滞后的。为说明其物理含义,设在坐标原点有一个按图 5-4 随时间变化的点电荷 $q(t)$。此时,由式(5-42)得空间任意一点的标量位为

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}$$

从上式不难看出,给定点的电位不是瞬间建立起来的,只有当 $t \geqslant r/v$ 时,才不

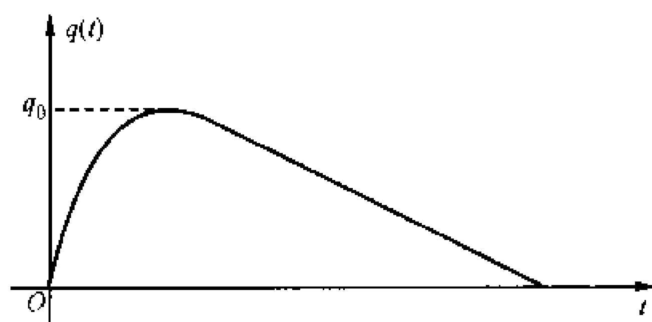



图 5－4　时变点电荷波形

为零。也就是说，在动态电磁场中，$q(t)$在空间 $r$ 点处产生的电位，需要一个时间 $t=r/v$ 的传播过程，其传播速度为

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5-45}$$

这表明时变点电荷产生的电位是以点电荷为中心、幅值与传播距离成反比的球面波，其波速由介质的介电常数和磁导率确定。应指出，在自由空间中

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\times 10^8 \quad \text{m/s}$$

正是光波在真空中的传播速度，即光速 $c$。

图 5－5 画出了图 5－4 所示时变点电荷在空间产生的电位传播过程。

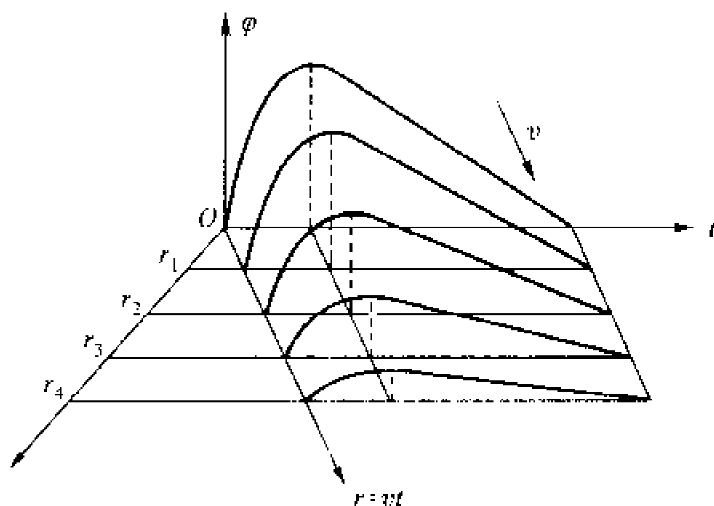



图 5－5　标量电位的传播

同理，可得式(5－32)方程的积分解为

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{5-46}$$

由以上分析可知，空间各点动态标量位 $\varphi$ 和动态矢量位 $\boldsymbol{A}$ 随时间的变化总

是落后于场源的变化，因此，通常也称 $\varphi$ 及 $A$ 为滞后位。此外，前已指出，式(5－39)中的第二项 $f_2\left(t+\frac{r}{v}\right)$ 不符合实际的物理条件，现在看来是十分明显的，因为时间因子 $\left(t+\frac{r}{v}\right)$ 意味着场效应超前于源的作用，违反事物的因果关系，故理应舍去。

对于时谐电磁场，为简化分析，将式(5－46)和(5－44)中的时间延迟项仍以坐标原点为基准点，记为 $\left(t-\frac{r}{v}\right)$，改写为如下形式

$$\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)=\omega t-\frac{\omega}{v}r=\omega t-kr \tag{5-47}$$

上式表明，时域上的延迟等同于频域上相位的滞后。因此，对应于式(5－46)和(5－44)的复数形式的电磁位积分解为：

$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{5-48}$$

和

$$\dot{\varphi}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\dot{\rho}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{5-49}$$

而以上两式给出的积分解正是式(5－34)和(5－35)非齐次亥姆霍兹方程的解答。

此时，关于电磁波传播滞后效应的分析，可根据式(5－47)由等相位点的传播过程，即对 $\theta_0=\omega t-kr$ 求导，得该相位点的传播速度为

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

波的传播方向为 $r$ 方向，波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k} \tag{5-50}$$

由上式可见，包含在 $2\pi$ m 长度(对应 $2\pi$ 相位)中的波长数为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{5-51}$$

因此，$k$ 被称为波数，也称为相位系数。它既可以利用式(5－51)计算，也可以由式(5－36)计算之。

求得电磁位后，就可以利用式(5－27)和(5－28)或其对应的复矢量计算式求出同一点的磁感应强度和电场强度。注意到，由于洛伦兹规范[式(5－31)]已给出了 $\boldsymbol{A}$ 和 $\varphi$ 的约束关系，所以事实上只需单一地求出 $\boldsymbol{A}$ 或 $\varphi$，即已满足动态电磁场分析的需要。

## 5.4 电磁辐射

随时间变化的场源 $\rho$ 或 $\boldsymbol{J}$ 产生的电磁场以波的形式在空间传播，这种现象被称为场源的电磁辐射。今后，如不指明，则所论的电磁场均指时谐电磁场。这主要基于两方面的考虑：一是在实际工程中，电磁发射往往是以某一频率的正弦波为载频；二是时谐电磁场分析相对比较简单，其结果易于延拓到整个频域，并可借助傅里叶分析计算其他类型的动态电磁场。

### 5.4.1 电偶极子的电磁场

电偶极子 $I\Delta l$（图 5－6）是最简单的电磁辐射元件。通常称产生电磁辐射的元件为天线。设电偶极子长度 $\Delta l$ 远小于其上电流频率对应的电磁波波长，

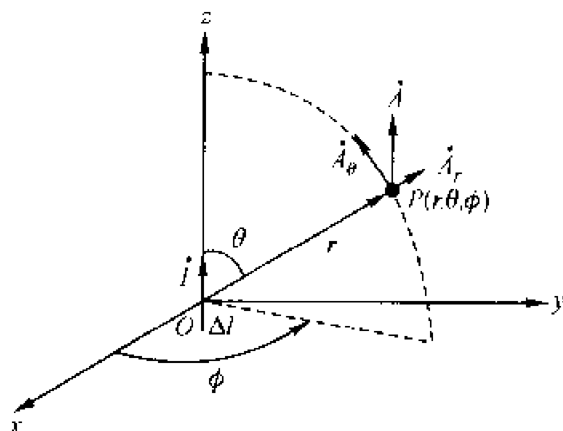



图 5－6　电偶极子（元天线）

且其横截面可忽略不计。$\dot{I}$ 为电流有效值相量。由式（5－48），并设 $\Delta l \ll r$，得

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0 \dot{I} \Delta l}{4\pi r} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \boldsymbol{e}_z$$

将上式在球坐标系下展开，可写成

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0 \dot{I} \Delta l}{4\pi r} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} (\cos\theta\, \boldsymbol{e}_r - \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta)$$

根据 $\dot{\boldsymbol{H}} = \nabla \times \dot{\boldsymbol{A}} / \mu_0$，可得

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\dot{I} \Delta l}{4\pi r^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} (1 + \mathrm{j}kr) \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\phi \tag{5-52}$$

虽然可利用与式（5－31）和式（5－28）对应的复矢量计算式，先求 $\dot{\varphi}$，再求 $\dot{\boldsymbol{E}}$。但基于上式，直接由式（5－6a）求 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 更为方便，即

$$\dot{E} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon} \nabla \times \dot{H}$$

$$= -\mathrm{j} \frac{\dot{I}\Delta l}{2\pi\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r^3}(1 + \mathrm{j}kr)\cos\theta\, \boldsymbol{e}_r - \mathrm{j} \frac{\dot{I}\Delta l}{4\pi\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r^3}(1 + \mathrm{j}kr - k^2r^2)\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta \tag{5-53}$$

### 5.4.2 近场与远场

电偶极子电磁场的表达式[式(5－53)和(5－52)]相当复杂，其中包含由 $kr$ 不同幂次项组合的因子。显然，取决于 $kr$ 的变化，其各项所起的作用是不同的。为深入分析场的特性，按 $kr$ 取值，分别研究靠近和远离电偶极子的各区域场的特性是极为明晰、有益的。

首先，靠近电偶极子的区域，即 $kr \ll 1$（相当于 $r \ll \lambda$），定义为近区。由式(5－53)和(5－52)可知，该区域中 $\dot{E}$ 和 $\dot{H}$ 可近似表达为：

$$\dot{E} \approx -\mathrm{j} \frac{\dot{I}\Delta l\cos\theta}{2\pi\omega\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r - \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l\sin\theta}{4\pi\omega\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta \tag{5-54}$$

$$\dot{H} \approx \frac{\dot{I}\Delta l\sin\theta}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_\phi \tag{5-55}$$

利用电流与电荷的关系，即 $\dot{I} = \mathrm{j}\omega\dot{q}$。式(5－54)又可写为

$$\dot{E} \approx \frac{\dot{q}\Delta l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\dot{q}\Delta l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta \tag{5-56}$$

将式(5－56)和(5－55)分别与电偶极子产生的静电场[式(2－32)]和电流元产生的恒定磁场[式(3－40)]相对比，可以看出，其场分布是相同的。此外，场与源的相位完全相同，两者之间没有时差。因此，虽然源随时间变化，但它产生的近区场（近场）与静态场的特性完全相同，无滞后效应，所以近场也称为似稳场。同时，从式(5－54)和(5－55)还可看出，电场强度和磁场强度的相位差为 90°，故坡印廷矢量的平均值 $\boldsymbol{S}_{av}$ 为零。这说明存储在电偶极子附近空间的能量表现为电场与磁场之间相互交换的方式，而并不产生向无限远空间传送的电磁辐射。应指出，事实上近场也有平均功率在传输，而且正是这部分功率提供了向外空间传送的辐射功率，只是相对于存储在近场的功率而言，其值可以忽略不计。

其次，远离电偶极子的区域，即 $kr \gg 1$（相当于 $r \gg \lambda$），定义为远区。此时 $\dot{E}$ 和 $\dot{H}$ 可近似表达为：

$$\dot{E} = \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta lk^2}{4\pi\omega\epsilon_0 r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\boldsymbol{e}_\theta \tag{5-57}$$

$$\dot{H} = \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta lk}{4\pi r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\boldsymbol{e}_\phi \tag{5-58}$$

可以看出,远区场(远场)中 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 在空间上相互垂直并与半径为 $r$ 的球面相切,且同相位。它们的振幅均反比于 $r$。式(5-57)和(5-58)的 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 的振幅之比定义为介质的特性阻抗,即在自由空间中

$$\eta = \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{k}{\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega \tag{5-59}$$

一般情况下,则

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5-60}$$

由于特性阻抗反映了电磁波的电场强度和磁场强度之比,它又被称为介质的波阻抗。

由式(5-57)和(5-58),得空间任意一点复坡印廷矢量的平均值[式(5-26)]为

$$\boldsymbol{S}_{av} = \eta\left(\frac{I\Delta l}{2\lambda r}\right)^2 \sin^2\theta \boldsymbol{e}_r \tag{5-61}$$

这表明电磁能量向无限远辐射。由此可见,时谐振荡的电流以波的形式向空间辐射电磁能量。此种辐射电磁能量的电磁场称之为辐射场,亦即电磁波。

基于式(5-57)、(5-58)和(5-61),可以看出,对于远场中的电磁波,无论是电场强度还是磁场强度,它们的相位在以电偶极子为中心形成的球面上是等相位的,称等相位面为球面的电磁波为球面波。它具有如下特点:(1) $\dot{\boldsymbol{E}}$、$\dot{\boldsymbol{H}}$ 和 $\boldsymbol{S}_{av}$ 相互垂直,且满足右手螺旋关系;(2) $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 同相位且它们的振幅之比为介质的特性阻抗;(3) 传播方向由相位因子 $e^{\pm jkr}$ 确定,当 $jkr$ 前取“-”时,沿 $\boldsymbol{e}_r$ 方向传播;反之,沿 $-\boldsymbol{e}_r$ 方向传播。由此可知,当分析在无限大空间传播的电磁波时,只需得知 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 中的一个,另一个就可以利用上述的特点求出。所以今后将只分析电磁波的电场强度。

### 5.4.3 方　向　图

电偶极子是最简单的天线,它产生的辐射场不仅与场点到源点的距离有关,还与同一球面上的 $\theta$ 和 $\phi$ 角度有关。从式(5-57)和(5-58)可以看出,$\theta=0$,即在 $z$ 轴方向上辐射为零;$\theta=90°$,也就是在垂直 $z$ 轴的方向上辐射最强。辐射场的电场强度随 $\theta$ 和 $\phi$ 角度变化的函数 $f(\theta,\phi)$ 被称为天线的方向图因子。根据 $f(\theta,\phi)$ 画出的图形被称为该天线的方向图,方向图描述了天线辐射场强在空间的分布情况。由式(5-57),得电偶极子的方向图因子为

$$f(\theta,\phi) = \sin\theta$$

图 5-7 为电偶极子天线在子午面上的方向图,显然,其图形是位于子午面 $z$ 轴

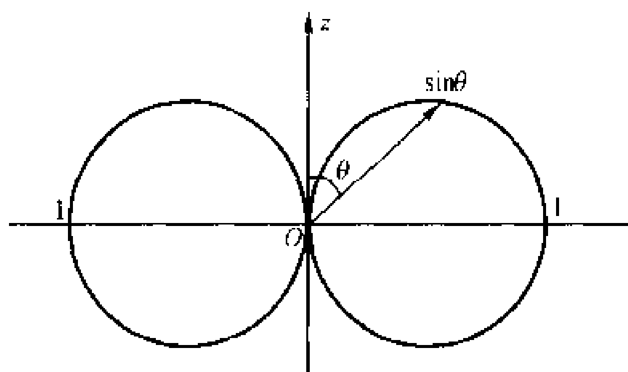



图 5-7 电偶极子天线的方向图

两侧的两个单位圆。

选取一个包围电偶极子半径为 $r$ 的球面，根据式(5-61)，可得电偶极子天线向外发出的总辐射功率为

$$P=\oint_S \boldsymbol{S}_{av}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{2\pi}{3}\eta\left(\frac{I\Delta l}{\lambda}\right)^2 \tag{5-62}$$

不难看出，$P$ 与球面半径 $r$ 无关，这表明总辐射功率 $P$ 通过空间由天线辐射到无限远。如将式(5-62)写为 $P=I^2R_r$ 形式，则

$$R_r=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2\eta \tag{5-63}$$

称为天线的辐射电阻，它表示天线的辐射能力。$R_r$ 愈大则天线的辐射功率也就愈强。由于辐射电阻与 $\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)$ 有关，而有限长的线形天线又可看作电偶极子天线的叠加，因此，当电源频率较高即 $\lambda$ 较小时，可使用较短的天线发送一定量的辐射功率；而当频率较低即 $\lambda$ 较大时(如长波通信、无线电导航等)，就必须使用相当长的天线才能发送一定量的辐射功率。有时还常用 $P$ 或 $R_r$ 表示由式(5-61)给出的坡印廷矢量的平均值，即：

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{3P}{8\pi r^2}\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r \tag{5-64}$$

或

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{3R_rI^2}{8\pi r^2}\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r \tag{5-65}$$

**例 5-3** 个人通信系统频率范围为 800 MHz—3 GHz。GSM 系统双频移动电话天线的发射功率，当 $f=900$ MHz 时为 0.1～2 W；当 $f=1.8$ GHz 时为 0.1～1 W。若将该移动电话天线近似看作为偶极子天线，试分别计算距移动电话 3 cm 处的最大功率面密度。

**[解]** 由式(5-64)可知，在距离一定的情况下，最大功率面密度出现在 $\theta=90°$ 情况：

当 $f = 900$ MHz 时，$S_{avmax} = 265.2\ W/m^2 = 26.52\ mW/cm^2$

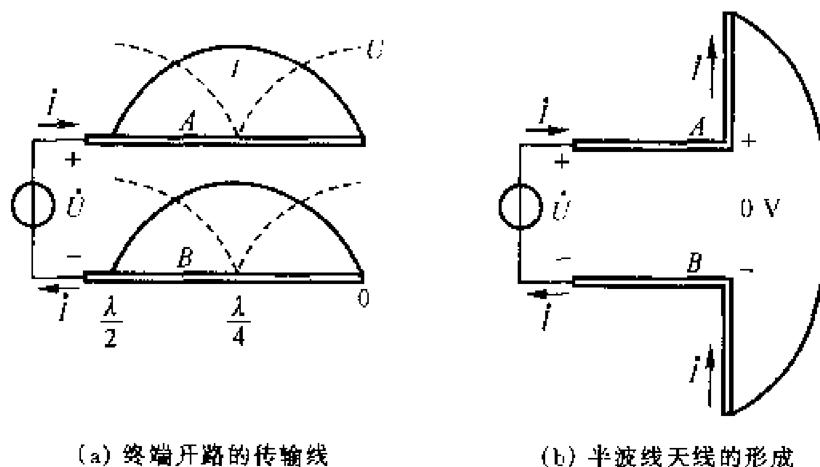
当 $f = 1.8$ GHz 时，$S_{avmax} = 132.6\ W/m^2 = 13.26\ mW/cm^2$

需要说明的是，以上仅是估算值。这是因为，在自由空间中，900 MHz 电磁波对应的波长为 33.3 cm，1.8 GHz 电磁波对应的波长为 16.7 cm。而移动电话的天线长度既不满足远小于波长，也不满足远场条件，并且还未考虑使用移动电话时人体头部媒质对电磁场的扰动。但是，令人瞩目的是，1～3GHz 频率范围内的电磁波能够全部被皮肤、脂肪和肌肉所吸收，使人体深处的细胞加热，导致内部器官损伤。因此，世界各国均对功率面密度限值作了规定，如美国 IEEE/ANSI 标准规定功率面密度限值为 1 $mW/cm^2$。显然，本例在两个工作频率下的最大功率面密度均超过了 1 $mW/cm^2$。所以，从健康的角度考虑，不应长时间使用移动电话。

## 5.4.4 线天线与天线阵

在电偶极子辐射场的讨论中，假设电偶极子长度 $\Delta l$ 远小于波长，且 $\Delta l$ 上的电流振幅为常数。然而，实际天线的长度并不满足这一条件，即天线长度与波长是可以比拟的。这将导致天线上沿线的电流分布发生变化。现首先讨论工程上称为线天线的辐射场。所谓线天线是指具有一定长度，且线半径远小于长度的直线导体构成的天线。

图 5－8 是半波线天线的形成示意图，图 5－8(a)为终端开路的传输线，图中画出了电压和电流沿线分布曲线。在距终端 $\frac{\lambda}{4}$ 处，将传输线分别向上和向下折 90°，就形成了图 5－8(b)的半波线天线。这表明半波线天线易于与传输线匹配，天线上的电流分布可以用终端开路传输线上的电流分布予以近似表示。由此可知，如图 5－9 所示的半波线天线的电流分布。




(a) 终端开路的传输线　　(b) 半波线天线的形成

图 5－8　由终端开路传输线形成半波线天线

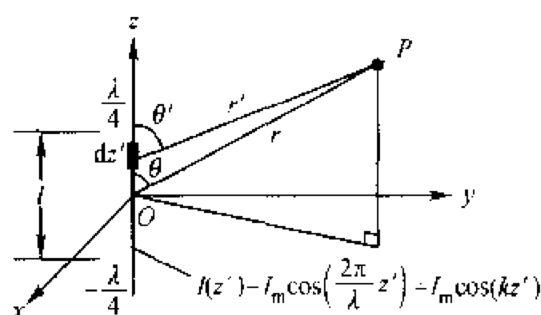



图 5－9 半波线天线

由式(5－57)得半波线天线产生的辐射电场强度为

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\mathrm{j}\frac{\dot{I}k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}}\frac{1}{r'}\cos(kz')\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'}\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_\theta$$

由于 $r\gg l$，近似地有 $\theta'\approx\theta, r'\approx r-z'\cos\theta$，电场强度可改写为

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\mathrm{j}\frac{\dot{I}k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0 r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}}\cos(kz')\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz'\cos\theta}\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\mathrm{j}\frac{\dot{I}k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0 r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\cdot\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\mathrm{j}\frac{\dot{I}k}{2\pi\omega\varepsilon_0 r}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\boldsymbol{e}_\theta$$

方向图因子为

$$f(\theta,\phi)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

图 5－10 为半波线天线的方向图，可以看出，它比电偶极子有更好的方向性。半

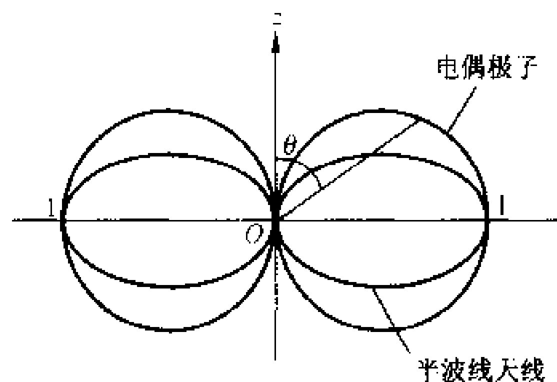



图 5－10 半波线天线方向图

波线天线是广泛应用的一种线天线，主要用于 30 MHz—3 GHz 超短波频段的电磁波发射和接收。

在工程上，除需要关于 $z$ 轴对称的全向天线外，还需要定向天线。将多个线天线组合在一起可以构成天线阵。调整天线阵中各天线的相互位置和电流相位，可以获得满足定向要求的各种形状的方向图。下面以图 5－11 所示由 $N$ 个相互平行的线天线构成的天线阵（$N$ 元天线阵）为例。设相邻两天线距离为 $d$，电流振幅分布相同，相位依次滞后为 $\alpha$。从图 5－11 可以看出，相邻两天线在场点由于波程差和电流相位差产生的总相位差为

$$\psi = kd\sin\theta\cos\phi - \alpha \tag{5-66}$$

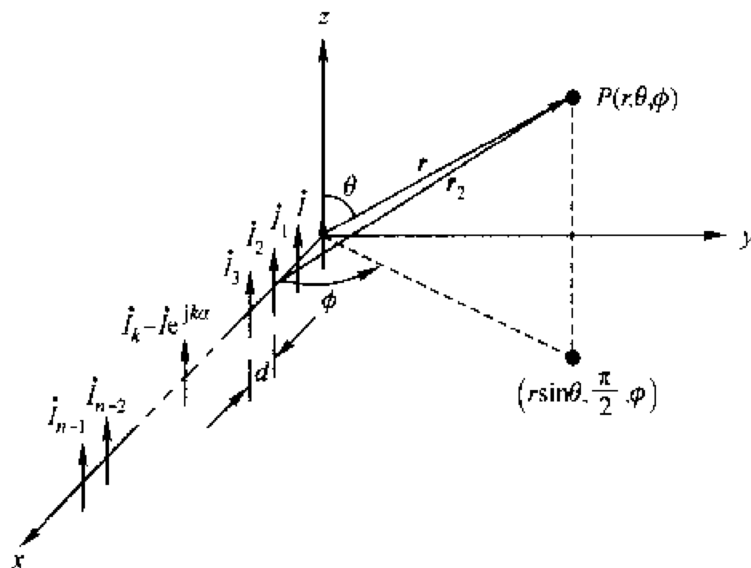



图 5－11　$N$ 元天线阵

如果设图 5－11 原点线天线的辐射电场强度为 $\dot{E}_0$，则 $N$ 元天线阵在场点总的辐射电场为

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \dot{E}_0[1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi}] \\ &= \dot{E}_0\frac{1-e^{jN\psi}}{1-e^{j\psi}} = \dot{E}_0\frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \dot{E}_0 g(\psi)\end{aligned} \tag{5-67}$$

式中

$$g(\psi) = \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \tag{5-68}$$

被称为 $N$ 元天线阵的阵因子。如果图 5－11 所示 $N$ 元天线阵均由半波线天线组成，则式（5－67）的总辐射电场强度为

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \mathrm{j}\frac{\dot{I}k}{2\pi\omega\varepsilon_0 r} f(\theta,\phi) g(\psi) \boldsymbol{e}_\theta \tag{5-69}$$

上式表明，$N$ 元天线阵的方向图因子为线天线方向图因子与天线阵阵因子的乘积。为更好地理解天线阵的方向性，取 $\theta = 90°$，此时

$$\psi = kd\cos\phi - \alpha \tag{5-70}$$

为了确定天线阵的最大辐射方向，图 5-12 画出式(5-68)所示阵因子 $g(\psi)$ 随 $\psi$ 的变化曲线。可见，当 $\psi = 0$ 时，辐射最强，最强的主瓣宽度为 $\frac{\pi}{N}$，由式(5-70)得，最强辐射的角度为

$$\phi = \arccos\left(\frac{\alpha}{kd}\right) = \arccos\left(\frac{\alpha\lambda}{2\pi d}\right) \tag{5-71}$$

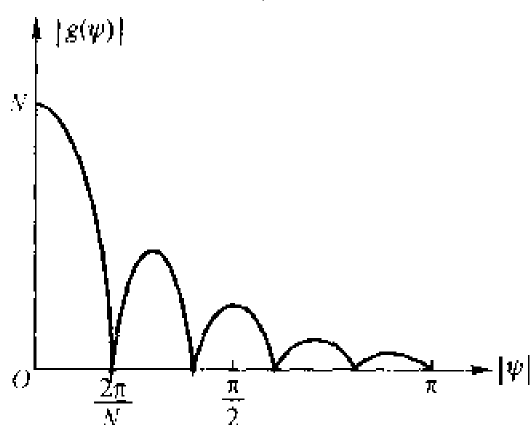



图 5-12　阵因子分布曲线

上式表明，当 $d$ 一定时，调整各个线天线的相位差 $\alpha$，可以改变天线阵的最大辐射方向，这正是相控天线阵的工作原理。图 5-13 画出了六元天线阵对应于不

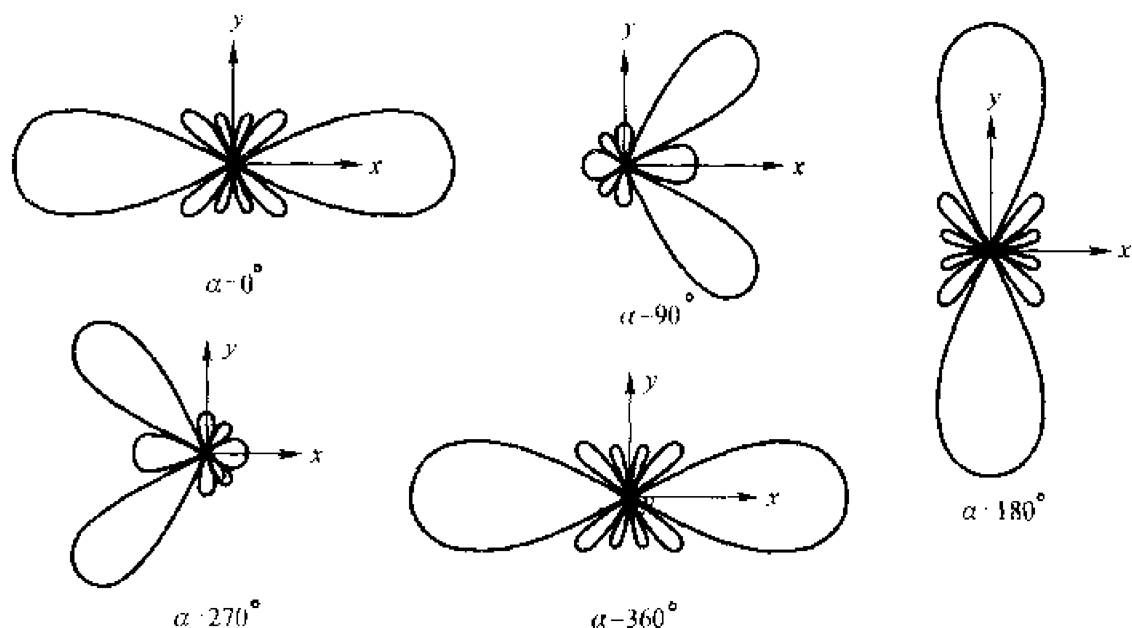



图 5-13　不同相位差 $\alpha$ 时对应的方向图

同 $\alpha$ 时的方向图，其中 $d=\frac{\lambda}{2}$。

### 5.4.5 天线的互易性

前面讨论了线天线的发射特性，当线天线用作接收天线时，其方向图和发射天线的方向图是等同的。这一结论被称为天线的互易定理。对此，现讨论如下。设在空间中有体积为 $V_1$ 的电流源 $\dot{\boldsymbol{J}}_1$ 和体积为 $V_2$ 的电流源 $\dot{\boldsymbol{J}}_2$，它们在空间任意点产生的辐射电磁场分别为 $\dot{\boldsymbol{E}}_1$、$\dot{\boldsymbol{H}}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{E}}_2$、$\dot{\boldsymbol{H}}_2$。利用矢量恒等式有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{E}}_1\times\dot{\boldsymbol{H}}_2)&=\dot{\boldsymbol{H}}_2\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}_1)-\dot{\boldsymbol{E}}_1\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}_2)\\&=-\mathrm{j}\omega(\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{E}}_2+\mu\dot{\boldsymbol{H}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{H}}_2)-\dot{\boldsymbol{E}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{J}}_2\end{aligned}\tag{5-72}$$

将上式下标 1 和 2 互换，得

$$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{E}}_2\times\dot{\boldsymbol{H}}_1)=-\mathrm{j}\omega(\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{E}}_1+\mu\dot{\boldsymbol{H}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{H}}_1)-\dot{\boldsymbol{E}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{J}}_1\tag{5-73}$$

式(5－72)和(5－73)相减后在无限大空间积分，并应用散度定理，得

$$\oint_{S_\infty}(\dot{\boldsymbol{E}}_1\times\dot{\boldsymbol{H}}_2-\dot{\boldsymbol{E}}_2\times\dot{\boldsymbol{H}}_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{V_1+V_2}(\dot{\boldsymbol{E}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{J}}_1-\dot{\boldsymbol{E}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{J}}_2)\mathrm{d}V$$

在上式推导中，应用了在非 $V_1$ 和 $V_2$ 的体积中 $\dot{\boldsymbol{J}}_1=\dot{\boldsymbol{J}}_2=0$ 的条件。上式的面积分为零，且设载流体积均为线天线。因此，上式即为

$$\int_{l_1}\dot{\boldsymbol{E}}_2\cdot\dot{I}_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_2}\dot{\boldsymbol{E}}_1\cdot\dot{I}_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}\tag{5-74}$$

由于假定线天线为理想导体，这意味着在线天线表面上无电场强度的切向分量。式(5－74)线积分仅在线天线信号馈入点成立，如图 5－14 所示，应为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{12}\cdot\dot{I}_1\boldsymbol{h}_1=\dot{\boldsymbol{E}}_{21}\cdot\dot{I}_2\boldsymbol{h}_2\tag{5-75}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{E}}_{12}$表示线天线 2 在线天线 1 处产生的电场强度，$\dot{\boldsymbol{E}}_{21}$表示线天线 1 在线天线 2 处产生的电场强度。若令这两线天线电流和几何尺寸完全相同，则式(5－75)为

$$\dot{E}_{12}=\dot{E}_{21}\tag{5-76}$$

如果将线天线 1 作为发射天线，线天线 2 作为接收天线。则在线天线 2 馈入点感应的电场强度应正比于线天线 1 的方向图因子，即

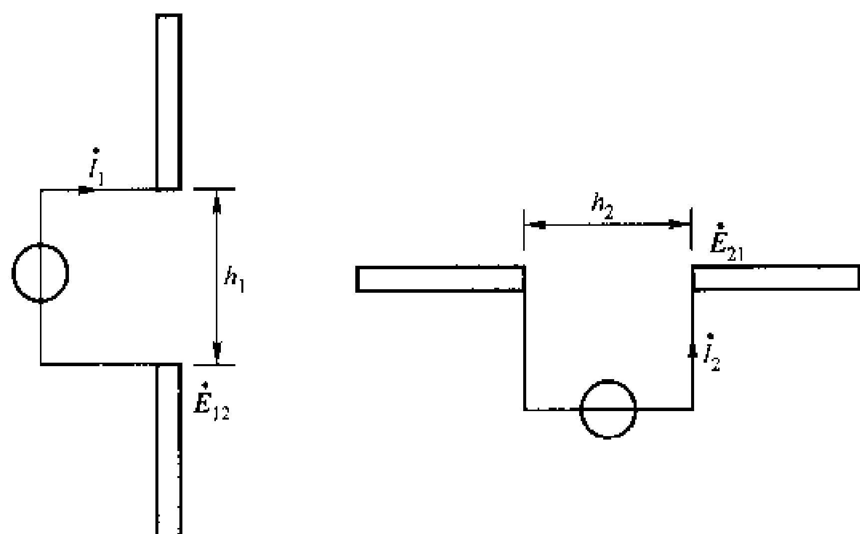



图5－14　两个线天线

$$E_{21} = E_0 f(\theta, \phi)$$

现在将线天线1作为接收天线，线天线2作为发射天线，由式(5－76)知，在线天线1馈入点感应的电场强度为

$$E_{12} = E_{21} = E_0 f(\theta, \phi)$$

上式表明，当线天线1在以线天线2为中心的球面上移动时，在线天线1馈入点感应的电场强度正比于将它作为发射天线的方向图因子。这就证明了天线用作接收时的方向图因子与用作发射时的方向图因子是相同的。

除线天线外，还有其他形式的天线，有兴趣的读者可参考相关书籍，本书不再展述。

### 5.4.6　电磁波频谱

天线向空间发射电磁波信号，并占用一定的频谱宽度。因此，频谱成为一种特殊资源。为了防止电磁波信号相互干扰，必须将电磁波的频谱进行合理分配，并进行有效的管理。我国由全国无线电管理委员会负责频谱分配、协调和管理。

图5－15是电磁波频谱分配图，图中不仅给出了频率、波长范围，还简明地描述了相应的应用领域。

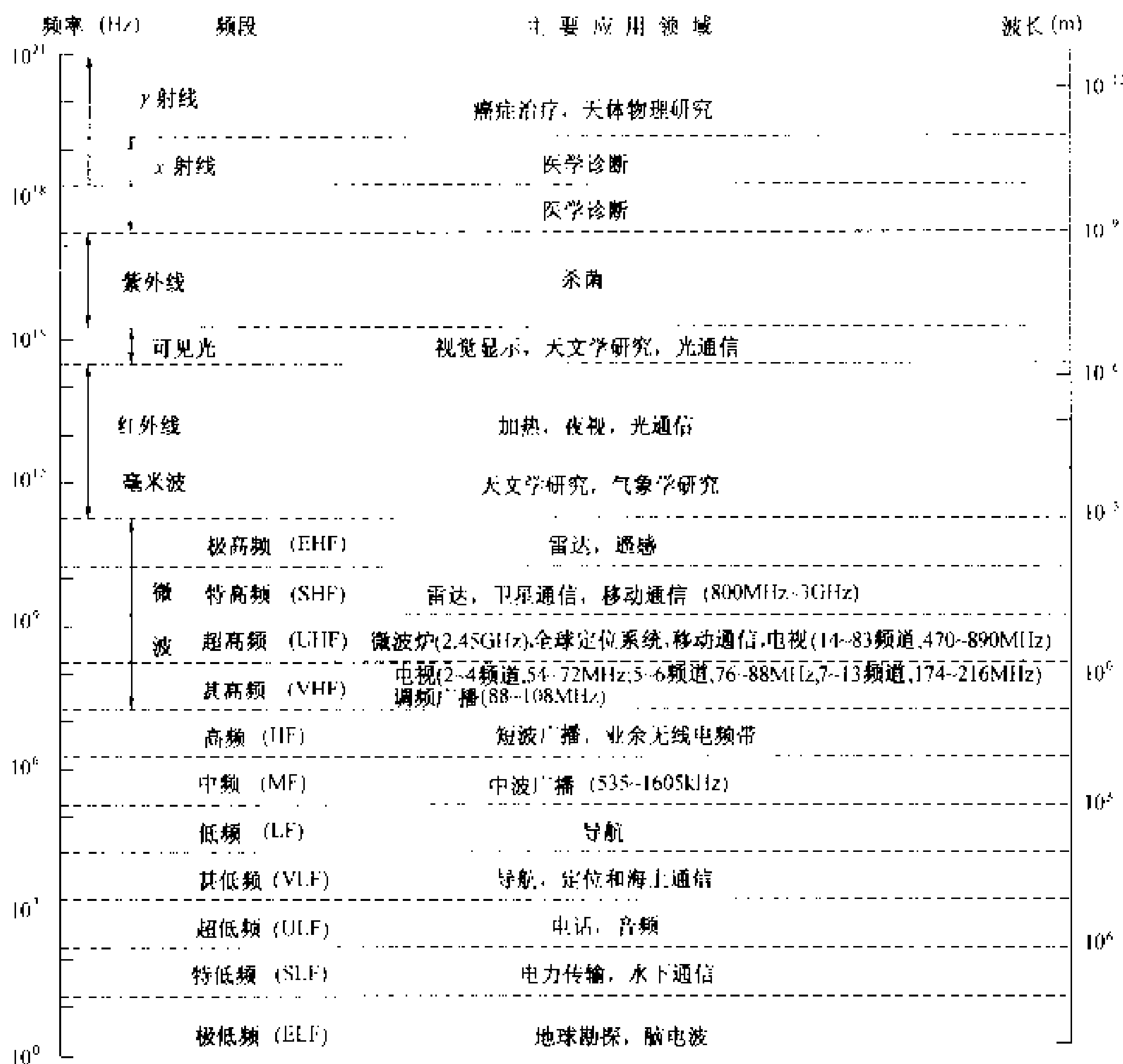



图 5-15 电磁波频谱分配图

## 5.5 理想介质中的均匀平面电磁波

电偶极子产生的辐射电磁场是球面电磁波，其等相位面是球面。当观察点远离电偶极子，且讨论范围限于观察点附近区域时，可以将球面近似为平面，且该平面上电场强度和磁场强度的振幅可近似看作为常量。这样，即称电场强度、磁场强度和传播方向满足右手螺旋关系、等相位面为平面的电磁波为平面波；并进而称电场强度和磁场强度振幅为常量的平面电磁波为均匀平面电磁波。无论是平面电磁波还是均匀平面电磁波，电场强度和磁场强度均垂直于传播方向，即在传播方向上无电磁场分量，这种电磁波又被称为横电磁波，也称为 TEM 波。下面主要讨论均匀平面电磁波在空间的传播规律和特性。

### 5.5.1 波动方程及其解

在无源理想介质空间中，式(5－1a)—(5－1d)麦克斯韦方程组可写为：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5－77a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5－77b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5－77c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{5－77d}$$

对式(5－77b)两边取旋度，并利用式(5－77a)和(5－2)，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

由矢量恒等式$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$，并利用式(5－77d)，上式变为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{5－78}$$

同理，由式(5－77a)—(5－77c)，对磁场强度可导出

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{5－79}$$

式(5－78)和(5－79)即为齐次波动方程。由此可见，在无源理想介质空间，电场强度和磁场强度的变化规律均满足齐次波动方程。对于时谐电磁场，式(5－78)和(5－79)的复数形式为：

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}} + k^2 \dot{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{5－80}$$

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{H}} + k^2 \dot{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{5－81}$$

式中，波数 $k$ 已分别由式(5－36)和(5－51)给出。式(5－80)和(5－81)又被称为齐次亥姆霍兹方程。

如前所述，均匀平面电磁波是电磁波的一种理想情况，但通过对它的研究，将对实际电磁波的分析和理解具有重要意义。为此，假设均匀平面电磁波沿 $z$ 轴方向传播，其波振面(对于时谐电磁波即为等相位面)平行于 $xOy$ 平面，且电场强度和磁场强度在该波振面上为常量，电场强度矢量与 $x$ 轴平行，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x(z, t) \tag{5－82}$$

将式(5－82)代入式(5－78)，得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{5－83}$$

由直接代入法可以证明，上式的解为

$$E_x = E_x^+(z - vt) + E_x^-(z + vt) \tag{5－84}$$

式中，波速 $v$ 由式(5－45)给出。利用式(5－77b)，可得

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mu}\int\nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}t=-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\mu}\int\frac{\partial E_x}{\partial z}\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_y\left[\frac{E_x^+(z-vt)}{\eta}-\frac{E_x^-(z+vt)}{\eta}\right] \tag{5－85}$$

式中，波阻抗 $\eta$ 由式(5－59)给出。

## 5.5.2 均匀平面电磁波的物理意义

从式(5－84)和(5－85)可以看出，在无源理想介质空间，波动方程的解由两项组成。第一项分别为电场强度 $E_x^+(z-vt)$ 和磁场强度 $H_y^+(z-vt)=E_x^+(z-vt)/\eta$。由5.4节中的分析与讨论可知，这是沿 $z$ 轴正方向传播的电磁波，又称为正向行波或入射波，如图5－16所示。它的传播速度为 $v$，电场强度、磁场强度和传播方向相互垂直且满足右手螺旋关系，电场强度与磁场强度之比为介质的波阻抗。波动方程解的第二项分别为电场强度 $E_x^-(z+vt)$ 和磁场强度 $H_y^-(z+vt)=-E_x^-(z+vt)/\eta$。现考察 $E_x^-(z+vt)$ 的一个定值点的运动情

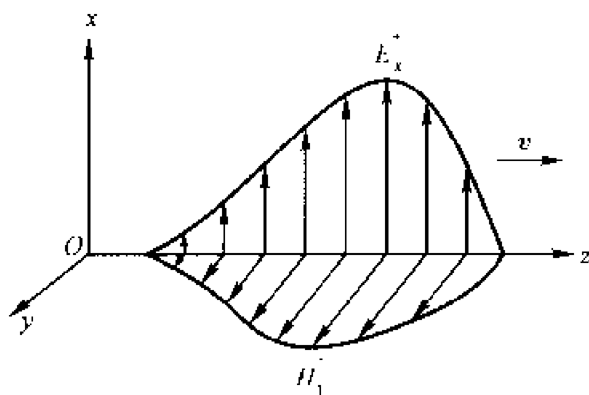



图5－16 正向行波

况，也就是在 $z+vt=\text{const}$ 条件下，对该定值点微分，即得该定值点运动速度为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-v \tag{5－86}$$

上式表明，电场强度 $E_x^-(z+vt)$ 和磁场强度 $H_y^-(z+vt)=-E_x^-(z+vt)/\eta$ 分别是沿 $z$ 轴反方向传播的电磁波，称为反向行波或反射波，如图5－17所示，其运动规律即电场强度、磁场强度与传播方向的关系，与正向行波的运动规律完全相同。

上述分析表明，均匀平面电磁波是由正向行波和反向行波叠加组成的。值得指出的是，式(5－84)中 $E_x^+(z-vt)$ 是由天线激励源确定的，而 $E_x^-(z+vt)$ 则取决于 $E_x^+(z-vt)$ 和正向行波在不同介质交界面处的反射状况。

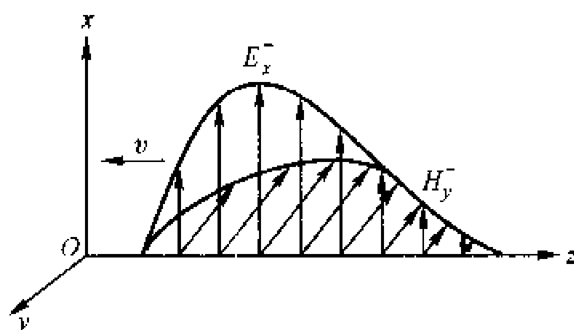



图 5－17　反向行波

## 5.5.3　波　矢　量

在时谐电磁场中,对应于式(5－82)的电场强度复数形式为

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{e}_x \dot{E}_x(z) \tag{5-87}$$

代入齐次亥姆霍兹方程(5－80),得

$$\frac{\mathrm{d}^2 \dot{E}_x}{\mathrm{d}z^2} + k^2 \dot{E}_x = 0$$

其解为

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x0}^{+} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \dot{E}_{x0}^{-} \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \tag{5-88}$$

式中 $\dot{E}_{x0}^{+}$ 和 $\dot{E}_{x0}^{-}$ 为两个复常数,式(5－88)对应的时域表达形式为

$$E_x(z,t) = \sqrt{2}\left|\dot{E}_{x0}^{+}\right|\cos(\omega t - kz + \phi_+) + \sqrt{2}\left|\dot{E}_{x0}^{-}\right|\cos(\omega t + kz + \phi_-)$$

式中,$\phi_+$ 和 $\phi_-$ 分别为复常数 $\dot{E}_{x0}^{+}$ 和 $\dot{E}_{x0}^{-}$ 的辐角(初相位)。上式表明,式(5－88)中第一项为电场正向行波;第二项为电场反向行波。将式(5－88)代入式(4－14b)并利用式(5－3),得

$$\dot{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{e}_y \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\mathrm{d}\dot{E}_x}{\mathrm{d}z} = \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \frac{\dot{E}_{x0}^{-}}{\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right) \tag{5-89}$$

同理,上式第一项为磁场正向行波;第二项为磁场反向行波。观察式(5－88)和(5－89),再次可见,正向行波(或反向行波)的电场强度、磁场强度和传播方向相互垂直且满足右手螺旋关系,电场强度与磁场强度的振幅之比等于介质的特性阻抗。

以上假定均匀平面电磁波沿 $z$ 轴方向传播。现继续讨论沿任意方向传播的均匀平面电磁波的运动规律。研究这一问题的关键是等相位平面的表示。为此定义均匀平面电磁波的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 如下

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_k k \tag{5-90}$$

式中 $k$ 为式(5－36)定义的波数,$\boldsymbol{a}_k$ 为均匀平面电磁波传播方向的单位矢量。

对上图 5－18 所示的均匀平面电磁波，等相位平面方程为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{const} \tag{5-91}$$

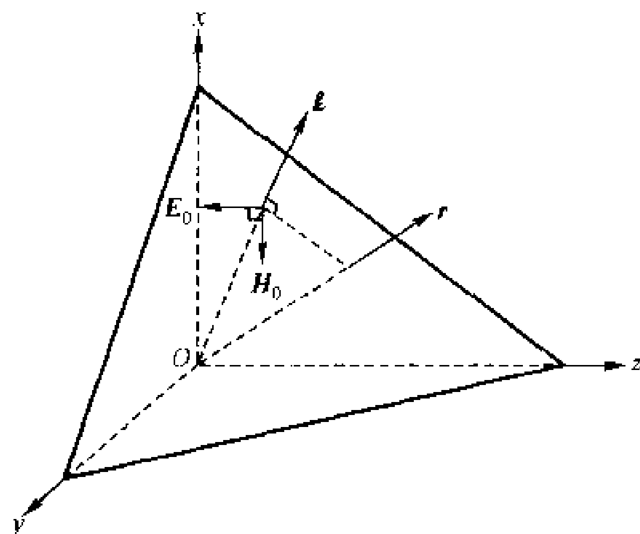



图 5－18　任意方向的均匀平面电磁波

这样，电场强度可以写为

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5-92}$$

磁场强度为

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{H}}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5-93}$$

显然，电场强度、磁场强度和波矢量的关系可以写为

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_k \times \dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\dot{\boldsymbol{E}} \tag{5-94}$$

**例 5－4**　从移动电话基站发射电磁波的磁场为 $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{e}_x 50 e^{-j\left(17.3y-\frac{\pi}{3}\right)}$ μA/m。试求：(1) 频率和波长；(2) 电场强度；(3) 坡印廷矢量的平均值。

［**解**］　已知空气中的波速 $v = 3\times10^8$ m/s，波阻抗为 $\eta_0 = 377\ \Omega$，则：

(1) $f = \dfrac{1}{2\pi}vk = \dfrac{1}{2\pi}\times 3\times10^8\times17.3\ \text{Hz} = 826\ \text{MHz}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{17.3}\ \text{m} = 0.363\ \text{m}$$

(2) 从磁场强度表达式中看出，电磁波的传播方向为 $y$ 轴正方向，利用右手螺旋关系，电场强度方向为 $z$ 轴正方向，即

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{e}_z 50\times10^{-6}\eta_0 e^{-j\left(17.3y-\frac{\pi}{3}\right)}\ \text{V/m} = \boldsymbol{e}_z 18.85 e^{-j\left(17.3y-\frac{\pi}{3}\right)}\ \text{mV/m}$$

(3) $\boldsymbol{S}_{av} = \boldsymbol{e}_y 18.85\times10^{-3}\times50\times10^{-6}\ \text{W/m}^2 = \boldsymbol{e}_y 0.94\ \mu\text{W/m}^2$

由本例可见，移动电话基站发射的电磁波在空间单位面积上的电功率远远低于 1 mW/cm² 的安全标准限值。

**例 5-5** 已知调频广播电磁波的电场强度为 $\boldsymbol{E}=0.55(\boldsymbol{e}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y)\times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.17\pi(3x-\sqrt{3}y+2z)}$ V/m。试求：(1) 频率与波长；(2) 磁场强度；(3) 坡印廷矢量的平均值。

**[解]** 由电场强度表达式和式(5-91)等相位面的平面方程，波矢量为

$$\boldsymbol{k}=0.17\pi(3\boldsymbol{e}_x-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z)=0.68\pi\times\frac{3\boldsymbol{e}_x-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z}{4}\ \text{rad/m}$$

(1) $f=\dfrac{1}{2\pi}v|\boldsymbol{k}|=\dfrac{1}{2\pi}\times 3\times 10^8\times 0.68\pi\ \text{Hz}=102\ \text{MHz}$

$$\lambda=\frac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|}=\frac{2\pi}{0.68\pi}\ \text{m}=2.94\ \text{m}$$

(2) 由式(5-94)，得

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_k\times\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{377}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{2}{4}\\ 0.55 & 0.55\sqrt{3} & 0\end{vmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.17\pi(3x-\sqrt{3}y+2z)}\ \text{A/m}$$

$$=729.4(-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.17\pi(3x-\sqrt{3}y+2z)}\ \mu\text{A/m}$$

(3) 坡印廷矢量的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{\text{av}}=\text{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*]=0.55\times 729.4\times 10^{-6}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3}\end{vmatrix}\ \text{W/m}^2$$

$$=0.00402(6\boldsymbol{e}_x-2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z)\ \text{W/m}^2=32\boldsymbol{a}_k\ \text{mW/m}^2$$

由本例可见，调频广播电台发射的电磁波在空间的单位面积上的电功率也远远低于 1 mW/cm² 的安全标准限值。

## 5.6 均匀平面电磁波的反射与透射

在无限大均匀介质空间中，波动方程的解描述了由天线辐射产生的正向行波。然而，实际上常常遇到两种介质或介质与导电媒质交界面情况。由于电场强度和磁场强度在交界面上遵从边界条件，使来自天线辐射方向的正向行波在交界面上分解为两部分。一部分穿过交界面继续向前传播形成透射波；另一部分背离交界面形成反射波。电磁波的反射和透射是电磁波理论的重要内容，在工程实际中有广泛应用。如雷达、声纳和激光雷达等均应用了电磁波的反射理论。

### 5.6.1 反射定律与透射定律

假定两理想介质交界面为无限大平面，均匀平面电磁波以入射角 $\theta_1$ 由介质 1 向介质 2 传播，如图 5－19 所示。图中，$e_n$ 为交界面法向单位矢量，由介质 2 指向介质 1。波矢量 $k$ 与 $e_n$ 形成的平面称为入射平面。$\theta_1'$ 为反射角，$\theta_2$ 为透射角。在交界面点 $O$ 上，由于介质的突变，入射波将被分解为反射波和透射波。根据边界条件，$O$ 点两侧电场强度和磁场强度的切向分量应分别相等，且在电磁波的传播过程中，点 $O$ 的边界条件应沿交界面传播。也就是说，入射波、反射波和透射波沿交界面的传播速度必须相同是保证边界条件始终成立的必要条件。由图 5－19 得

$$\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_1}{\sin\theta_1'} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$$

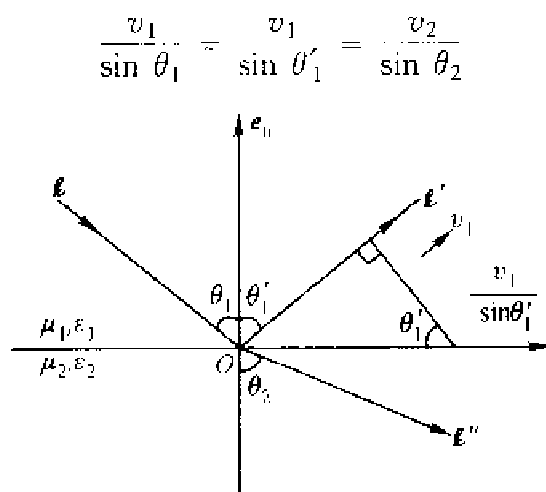



图 5－19 电磁波的反射与透射

由上式即得反射定律为

$$\theta_1' = \theta_1 \tag{5-95}$$

透射定律为

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \tag{5-96}$$

通常 $\mu_2=\mu_1$，且 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 被称为介质的折射率。这样，式(5－96)可以改写为光学中透射定律形式，即

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \tag{5-97}$$

**例 5－6** 光纤是芯径极细，外涂包层的二氧化硅介质棒，其沿轴线的子午面如图 5－20 所示。$n_1$ 为光纤芯的折射率，$n_2$ 为包层的折射率。为使光能在光纤芯和包层交界面上形成全反射，制造时使 $n_1$ 略大于 $n_2$。试求：光在光纤中持续传输的最大入射角 $\theta_c$(已知在空气中 $n_0=1$)。

[解] 能使光在光纤中持续传输的必要条件是 $\theta_2 = 90°$，由式(5－97)，可得

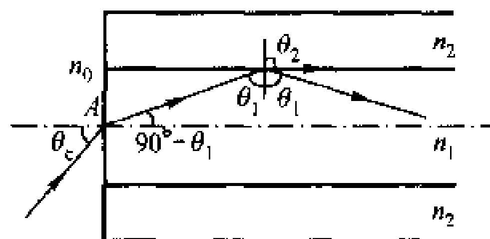


图 5－20 光纤子午面上的光线

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

在光纤端面点 A 处，再次应用式(5－97)，得：

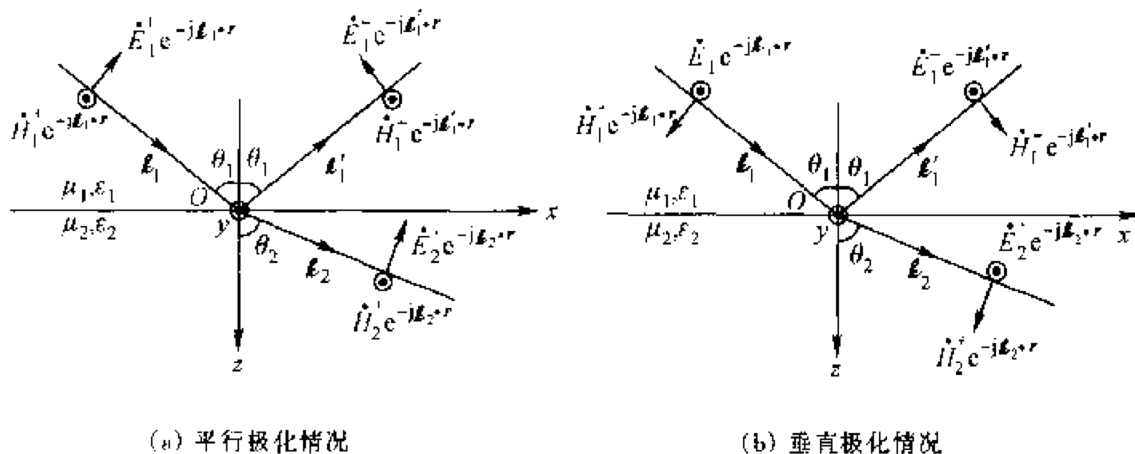
$$\sin\theta_c = n_1\sin(90° - \theta_1) = n_1\cos\theta_1$$

$$= \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\quad \theta_c = \arcsin\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

一般光纤芯径在几个微米至几十个微米之间。显然，$\theta_c$ 的大小直接关系到光源与光纤的耦合效率。$\sin\theta_c$ 称为光纤的数值孔径，它是光纤的一个重要参数。如阶跃多模光纤的参数为：$n_1 = 1.5$，$n_2 = 1.485$，$\sin\theta_c = 0.21$，$\theta_c = 12.1°$。

### 5.6.2 反射系数与透射系数

图 5－19 所示均匀平面电磁波的反射和透射问题，可以分解为图 5－21(a)和图 5－21(b)两种情况进行讨论。在图 5－21(a)中，电场强度矢量与入射面平行，这种情况称为平行极化情况；在图 5－21(b)中，电场强度矢量与入射面垂直，这种情况称为垂直极化情况。



(a) 平行极化情况　　(b) 垂直极化情况

图 5－21 均匀平面电磁波的反射与透射

对于平行极化情况，由图 5－21(a)和边界条件，得：

$$\dot{E}_1^+\cos\theta_1 - \dot{E}_1^-\cos\theta_1 = \dot{E}_2^+\cos\theta_2$$

$$\frac{\dot{E}_1^+}{\eta_1} + \frac{\dot{E}_1^-}{\eta_1} = \frac{\dot{E}_2^+}{\eta_2}$$

联立求解以上方程，得：

$$\dot{E}_1^- = \frac{\eta_1\cos\theta_1 - \eta_2\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1 + \eta_2\cos\theta_2}\dot{E}_1^+ \tag{5-98}$$

$$\dot{E}_2^+ = \frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_1\cos\theta_1 + \eta_2\cos\theta_2}\dot{E}_1^+ \tag{5-99}$$

为了表示均匀平面电磁波在介质交界面上的反射和透射情况，一般按电场强度在介质交界面的切向分量分别定义反射系数和透射系数如下：

$$R_{/\!/} = \frac{\dot{E}_1^-\cos\theta_1}{\dot{E}_1^+\cos\theta_1} = \frac{\eta_2\cos\theta_2 - \eta_1\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_2 + \eta_1\cos\theta_1} \tag{5-100}$$

$$T_{/\!/} = \frac{\dot{E}_2^+\cos\theta_2}{\dot{E}_1^+\cos\theta_1} = \frac{2\eta_2\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_2 + \eta_1\cos\theta_1} \tag{5-101}$$

一般 $\mu_1 = \mu_2$，应用式(5-97)，式(5-100)和(5-101)可以简化为：

$$R_{/\!/} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1} \tag{5-102}$$

和

$$T_{/\!/} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1} \tag{5-103}$$

对于垂直极化情况，类似地，可以得到：

$$\dot{E}_1^- = \frac{\eta_2\cos\theta_1 - \eta_1\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2}\dot{E}_1^+ \tag{5-104}$$

$$\dot{E}_2^+ = \frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2}\dot{E}_1^+ \tag{5-105}$$

按电场强度在介质交界面的切向分量分别定义的反射系数和透射系数为：

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2\cos\theta_1 - \eta_1\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2} \tag{5-106}$$

和

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2} \tag{5-107}$$

当 $\mu_1 = \mu_2$，并由式(5-97)，以上两式简化为：

$$R_{\perp} = \frac{\cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1}} \tag{5-108}$$

和
$$T_{\perp}=\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1}} \tag{5-109}$$

从 $R_{/\!/}$ 和 $T_{/\!/}$ 或 $R_{\perp}$ 和 $T_{\perp}$ 的表达式中，不难看出，反射系数和透射系数之间存在如下关系

$$1+R_{/\!/(\perp)}=T_{/\!/(\perp)} \tag{5-110}$$

若均匀平面电磁波入射到理想导体表面时，则由于理想导体内部电场强度必须为零，这时对于平行极化情况，在交界面上，应有

$$\dot{E}_1'\cos\theta_1-\dot{E}_1\cos\theta_1=0$$

故由式(5-100)可知 $|R_{/\!/}|=1$。同理可得 $|R_{\perp}|=1$。

此外，当 $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1\leqslant 0$ 时，$|R_{/\!/}|=|R_{\perp}|=1$，这时

$$\theta_1\geqslant\theta_c=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{5-111}$$

显然，只有当 $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ 时，上式才有意义。因此，对于两种理想介质交界面而言，全反射只能出现在入射角 $\theta>\theta_c$，且光由光密介质到光疏介质传播时的情况。$\theta_c$ 被称为全反射的临界角。

除全反射这种特殊现象外，另一种特殊现象是全透射，即反射系数等于零的情况。从式(5-108)可见，使 $R_{\perp}=0$ 的条件是 $\varepsilon_2=\varepsilon_1$。这说明对于垂直极化情况，不存在全透射现象。对于平行极化情况，令式(5-102)的 $R_{/\!/}=0$，得

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1}$$

求解上式得

$$\theta_1=\theta_B=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}=\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{5-112}$$

称式(5-112)的入射角 $\theta_B$ 为布儒斯特角。它表明当平行极化入射波以布儒斯特角入射到两介质交界面时，不存在反射波。在实际中，可以利用测量布儒斯特角来测量介质的介电常数，也可以利用布儒斯特角提取入射波的垂直极化分量。

### 5.6.3 垂直入射电磁波的反射与透射

作为上节的一个特例，我们研究垂直入射电磁波的反射与透射问题，也就是入射角 $\theta_1$ 等于零的情况。从图 5-21 可以看出，此时，平行极化和垂直极化情况兼并为同一种情况。也就是说，由式(5-100)—(5-103)得到的反射和透射

系数与式(5-106)—(5-109)的结果相同，即在垂直入射电磁波情况下，介质交界面上的反射和透射系数分别为：

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{5-113}$$

和

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{5-114}$$

对于大多数介质，$\mu_1 = \mu_2$，反射系数和透射系数又可以写为：

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \tag{5-115}$$

和

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \tag{5-116}$$

首先，分析均匀平面电磁波垂直入射理想导电平面的空间电磁场分布，如图 5-22 所示。设入射电磁波为

$$\dot{E}_x^+ = \dot{E}_0 e^{-jkz}$$

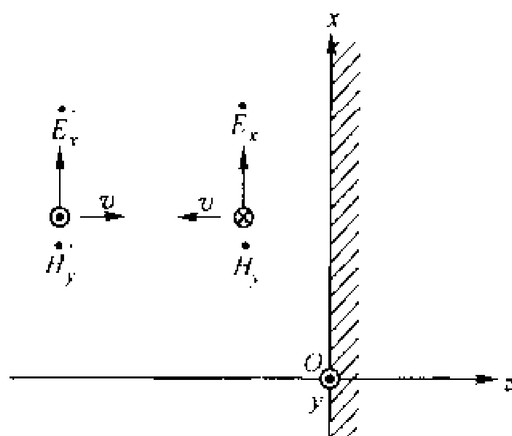



图 5-22 垂直入射到理想导电平面上的均匀平面波

由 5.6.2 节讨论可知，在理想导电平面上，电场强度的反射波分量和入射波分量量值相等而相位相反，即 $R = -1$，而透射电场为零，即 $T = 0$。这表明在理想导电平面上发生全反射。由反射系数定义式(5-98)或(5-104)，此时在理想导电平面上，有

$$\dot{E}_{x0}^- = R\dot{E}_{x0}^+ = R\dot{E}_0 = -\dot{E}_0$$

在 $z<0$ 的空间内，反射电场强度为

$$\dot{E}_x^- = -\dot{E}_0 e^{jkz}$$

总电场强度为

$$\dot{E}_x = \dot{E}_x^+ + \dot{E}_x^- = \dot{E}_0(e^{-jkz} - e^{jkz}) = -j2\dot{E}_0\sin(kz) \tag{5-117}$$

相应的磁场强度为

$$\dot{H}_y = \dot{H}_y^+ + \dot{H}_y^- = \frac{\dot{E}_0}{\eta}(e^{-jkz} + e^{jkz}) = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos(kz) \tag{5-118}$$

将 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$代入式(5－117)和(5－118)，空间电磁场可进一步写为：

$$\dot{E}_x = -j2\dot{E}_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \tag{5-119}$$

$$\dot{H}_y = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \tag{5-120}$$

从式(5－119)和(5－120)可以看出，由于出现全反射，空间电磁波不再是行波，而是驻波。电场强度和磁场强度的振幅分布如图 5－23 所示。显然，电场强度的波节即为磁场强度的波腹，同样，电场强度的波腹即为磁场强度的波节，且电场强度(或磁场强度)相邻波节或相邻波腹的空间距离为半波长。此时，能量不能通过波节传递，所以电场能和磁场能之间的交换只限于在空间距离为 $\lambda/4$ 的范围内进行。

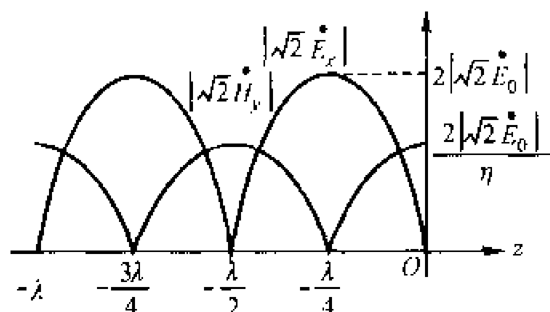



图 5－23　$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的振幅波形

其次，讨论均匀平面电磁波垂直入射两理想介质平面的空间电磁场分布，如图 5－24 所示。设入射波电场强度为

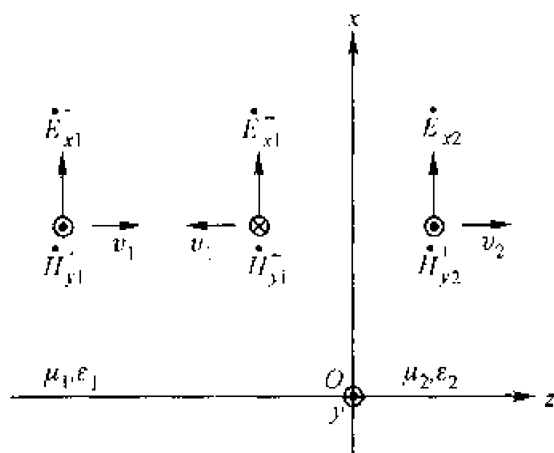



图 5－24　垂直入射到两理想介质交界面上的均匀平面波

$$\dot{E}^{+}_{x1} = \dot{E}_0 e^{-jk_1 z}$$

显然,在介质交界面上有:

$$\dot{E}^{-}_{x10} = R\dot{E}_0, \quad \dot{E}^{+}_{x20} = T\dot{E}_0$$

在介质 1 内,电场强度和磁场强度为:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{x1} &= \dot{E}^{+}_{x1} + \dot{E}^{-}_{x1} = \dot{E}_0(e^{-jk_1 z} + Re^{jk_1 z}) = \dot{E}_0 e^{-jk_1 z}(1 + Re^{j2k_1 z}) \\ &= T\dot{E}_0 e^{-jk_1 z} + j2R\dot{E}_0\sin(k_1 z)\end{aligned} \tag{5-121}$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_{y1} &= \dot{H}^{+}_{y1} + \dot{H}^{-}_{y1} = \frac{\dot{E}_0}{\eta_1}(e^{-jk_1 z} - Re^{jk_1 z}) = \frac{\dot{E}_0}{\eta_1}e^{-jk_1 z}(1 - Re^{j2k_1 z}) \\ &= \frac{T\dot{E}_0}{\eta_1}e^{-jk_1 z} - \frac{2R\dot{E}_0}{\eta_1}\cos(k_1 z)\end{aligned} \tag{5-122}$$

在介质 2 内,电场强度和磁场强度为:

$$\dot{E}_{x2} = T\dot{E}_0 e^{-jk_2 z} \tag{5-123}$$

$$\dot{H}_{y2} = \frac{T\dot{E}_0}{\eta_2}e^{-jk_2 z} \tag{5-124}$$

从以上四个表达式不难看出,由于在介质交界面上存在反射,介质 1 中的电磁波由行波和驻波两部分组成,而在介质 2 中只有行波分量提供能量,以保持介质 2 中行波的传播。可以求得介质 1 中的电场强度的模值为

$$|\dot{E}_{x1}| = E_0\sqrt{1 + 2R\cos(2k_1 z) + R^2} \tag{5-125}$$

图 5-25 画出了当 $R>0$ 时电场强度模值的分布图。由图 5-25 可见,由于在 $z=0$ 处介质的波阻抗不匹配,在介质 1 中存在反射波。通常用驻波比反映这种不匹配情况,即令

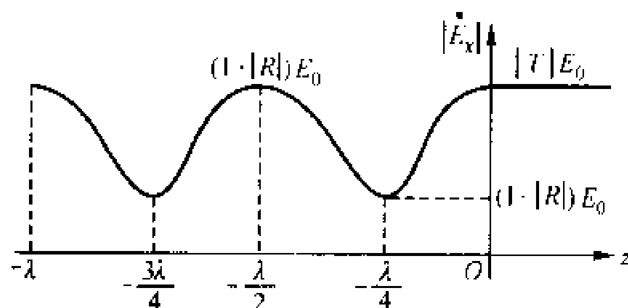



图 5-25 电场强度的有效值分布

$$SWR = \frac{|\dot{E}_{x1}|_{\max}}{|\dot{E}_{x1}|_{\min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \tag{5-126}$$

显然,可以通过测量驻波比 $SWR$ 来测定反射系数,即

$$|R| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1} \tag{5-127}$$

对于全反射情况,$SWR \to \infty$;对于匹配情况,$SWR = 1$。

**例 5-7** 均匀平面电磁波由空气垂直入射到水面上,设水是无损的,相对介电常数为 81。试求:(1) 水平面的反射系数和透射系数;(2) 驻波比;(3) 水中的坡印廷矢量的平均值。

**[解]** 设空气和水的相对磁导率 $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$,则

(1) 由式(5-115)和(5-116),得:

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{1-9}{1+9} = -0.8, \qquad T = 1 + R = 0.2$$

(2) 由式(5-126),得

$$SWR = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} = \frac{1 + 0.8}{1 - 0.8} = 9$$

(3) 由式(5-123)和(5-124),得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{av2} &= \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*] = \boldsymbol{e}_z \frac{T^2 E_0^2}{\eta_2} = \boldsymbol{e}_z \frac{\eta_1}{\eta_2} T^2 \frac{E_0^2}{\eta_1} = \boldsymbol{e}_z \frac{\eta_1}{\eta_2}(1 + R)^2 \frac{E_0^2}{\eta_1} \\ &= \boldsymbol{e}_z \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \frac{E_0^2}{\eta_1} = \boldsymbol{e}_z\left[1 - \frac{(\eta_2 - \eta_1)^2}{(\eta_2 + \eta_1)^2}\right]\frac{E_0^2}{\eta_1} = \boldsymbol{e}_z(1 - R^2)\frac{E_0^2}{\eta_1} = \boldsymbol{e}_z 0.36\frac{E_0^2}{\eta_1} \end{aligned}$$

可以看出,由于水面存在反射,水中的功率面密度始终小于空气中入射波的功率面密度。在实际中,可以采取匹配措施使反射系数等于零,实现功率的最大传输。

为讨论匹配问题,定义介质 1 中空间任一点的波阻抗如下

$$\eta(z) = \frac{E_{x1}}{H_{y1}}$$

由式(5-121)和(5-122),得

$$\eta(z) = \frac{1 + R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k_1 z}}{1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k_1 z}}\eta_1 = \frac{\eta_2 + \mathrm{j}\eta_1\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}z\right)}{\eta_1 + \mathrm{j}\eta_2\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}z\right)}\eta_1 \tag{5-128}$$

特别是当 $z = -\frac{\lambda_1}{4}$ 或 $z = -\left(n\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{4}\right)$ 时,其中 $n$ 为整数,有

$$\eta = \frac{\eta_1^2}{\eta_2} \tag{5-129}$$

上式表明，借助波阻抗为 $\eta_1$，厚度为$\frac{\lambda}{4}$介质板可以实现波阻抗分别为 $\eta$ 和 $\eta_2$ 两种不同介质之间的波阻抗匹配。此外，当 $z=-\frac{\lambda_1}{2}$或 $z=-n\frac{\lambda_1}{2}$时

$$\eta=\eta_2 \tag{5-130}$$

这表明，借助波阻抗为 $\eta_1$，厚度为$\frac{\lambda}{2}$介质板可以将波阻抗为 $\eta_2$ 的同一种介质分成两部分，而波阻抗不变。

**例 5-8** 设飞机地面导航雷达的波阻抗与空气相同，雷达的中心工作频率为 5 GHz。为保护雷达天线的清洁，通常覆加一个非磁性塑料天线罩，其相对介电常数为 3。为使雷达天线工作时无反射波，天线罩的厚度应为多少?

**[解]** 已知天线的波阻抗与空气相同，因此本例题意为在空气中插入一介质板，使其在空气中不存在反射波。由上述讨论知，当 $d=\frac{\lambda}{2}$或 $d=n\frac{\lambda}{2}$时，在空气与介质板交界面处的波阻抗就是空气波阻抗，即可使空气中无反射波存在。按题设，介质板中波长为

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}f}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{3}\times5\times10^9}\text{ m}=0.0346\text{ m}$$

所以，天线罩的厚度可选为 1.73 cm。

**例 5-9** 在光纤技术中，常在光学元件表面镀膜以减少光的反射。设激光在自由空间中的波长为 550 nm，光学玻璃为非磁性玻璃，其折射率为 1.52。为使激光照射在该光学玻璃上无反射，试确定镀膜厚度和镀膜材料的折射率。

**[解]** 由于空气与光学玻璃的波阻抗不同，需要采取 $\lambda/4$ 匹配技术，以保障激光照射在该光学玻璃上无反射，即在镀膜表面的波阻抗应等于空气波阻抗。由式(5-129)，得

$$\eta=\sqrt{\eta_0\eta_2}=\sqrt{\eta_0\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}}\eta_0=\frac{1}{\sqrt{n_2}}\eta_0$$

又因为镀膜的波阻抗可以写为

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\eta_0=\frac{1}{n}\eta_0$$

所以，镀膜材料的折射率为

$$n=\sqrt{n_2}=\sqrt{1.52}=1.233$$

镀膜厚度为

$$d=\frac{\lambda}{4}=\frac{1}{4}\frac{v}{f}=\frac{1}{4}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}f}=\frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{n}=\frac{550\times10^{-9}}{4\times1.233}\text{ m}=112\text{ nm}$$

## 5.7 琼斯矢量和琼斯矩阵

为简化分析，在上节讨论的均匀平面波的电场强度矢量在等相位面上仅有一个分量。现从工程实际需要出发，讨论在等相位面上电场强度为二维矢量的情况。这时，采用琼斯矢量可以方便地描述均匀平面波的极化特性及其传播规律。

### 5.7.1 琼斯矢量

仍设 $z$ 轴方向为均匀平面波的传播方向，且令其电场强度矢量的一般形式为

$$\dot{E} = (\boldsymbol{e}_x E_{x0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x} + \boldsymbol{e}_y E_{y0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y}) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{5-131}$$

式中，$\phi_x$ 和 $\phi_y$ 分别是 $\dot{E}$ 的 $x$ 和 $y$ 分量的初相位。定义琼斯矢量为

$$\dot{E}_{xy} = \begin{bmatrix} E_{x0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x} \\ E_{y0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y} \end{bmatrix} \tag{5-132}$$

可见，琼斯矢量事实上是电场强度矢量的一种矩阵表示。

### 5.7.2 波的极化

电场强度矢量随时间在等相位面上的变化轨迹称为电磁波的极化特性。若该轨迹是直线，则称为直线极化，简称线极化；轨迹是圆，称为圆极化；轨迹是椭圆，则称为椭圆极化。

为判断电磁波的极化特性，可讨论在 $z=0$ 等相位面上的电场强度，写成时域形式，即：

$$E_x(t) = \sqrt{2} E_{x0} \cos(\omega t + \phi_x) \tag{5-133}$$

$$E_y(t) = \sqrt{2} E_{y0} \cos(\omega t + \phi_y) \tag{5-134}$$

若上述电场强度的两分量 $E_x$ 和 $E_y$ 相位相同或反相（为简化分析，令初相位 $\phi_x = \phi_y = 0$），则合成场强 $\boldsymbol{E}(t)$ 为

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{E_x^2(t) + E_y^2(t)} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{E_{x0}^2 + E_{y0}^2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{E}(t)$ 的取向为

$$\alpha = \arctan\left[\frac{E_y(t)}{E_x(t)}\right] = \arctan\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right) = \text{const}$$

可见，$\boldsymbol{E}(t)$的取向与 $x$ 轴的夹角始终保持不变，而其大小随时间作正弦变化，即 $\boldsymbol{E}(t)$矢量末端随时间变化的轨迹为一直线，如图 5－26 所示，称之为线极化波，对应的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}_{xy} = \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \end{bmatrix}$$

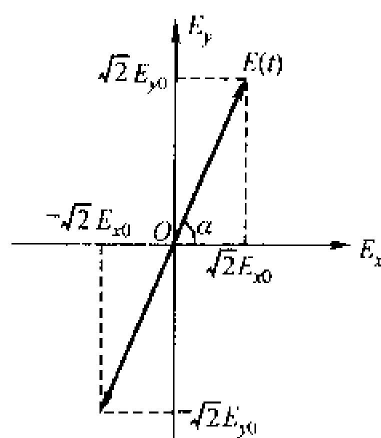



图 5－26　线极化波

若电场强度的两分量振幅相等，即$\sqrt{2}E_{x0} = \sqrt{2}E_{y0} = \sqrt{2}E_0$，但相位差为 ±90°，则 $\boldsymbol{E}(t)$矢量末端的轨迹为圆，称为圆极化波。例如，取 $\phi_x = 0°$，$\phi_y = -90°$，即得 $\boldsymbol{E}(t)$的模值为

$$E(t) = \sqrt{E_x^2(t) + E_y^2(t)} = \sqrt{2}E_0$$

而 $\boldsymbol{E}(t)$的取向为

$$\alpha = \arctan\left[\frac{E_y(t)}{E_x(t)}\right] = \omega t$$

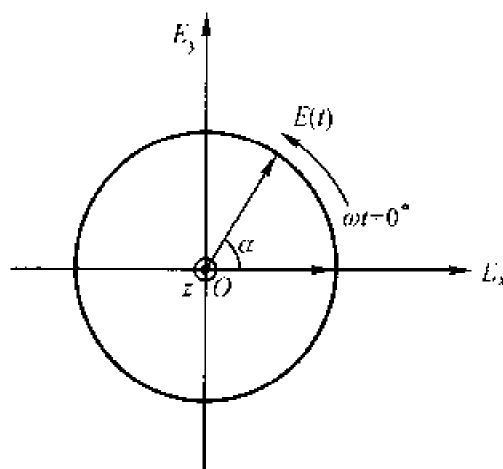



图 5－27　圆极化波

可见，$\boldsymbol{E}(t)$矢量末端的轨迹是半径为$\sqrt{2}E_0$以角速度 $\omega$ 旋转的圆，如图 5－27 所示。显然，$\boldsymbol{E}(t)$的旋转是有方向的。本书规定，让拇指指向电磁波传播方向，当 $\boldsymbol{E}(t)$的旋向与右手其他四指指向相同时，称为右旋；当 $\boldsymbol{E}(t)$的旋向与左手其他四指指向相同时，称为左旋。图 5－27 所示为右旋圆极化波，对应的琼斯矢量为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \end{bmatrix} E_0$$

可见，对于圆极化波，当琼斯矢量的 $x$ 分量超前 $y$ 分量 90°时，为右旋；反之，当琼斯矢量的 $x$ 分量滞后 $y$ 分量 90°时，为左旋。

对于一般情况（即非线极化和非圆极化波），取：

$$E_x(t) = \sqrt{2}E_{x0}\cos(\omega t)$$

$$E_y(t) = \sqrt{2}E_{y0}\cos(\omega t - \phi)$$

消去 $\omega t$，可解得 $\boldsymbol{E}(t)$的轨迹方程为

$$\frac{E_x^2(t)}{2E_{x0}^2}+\frac{E_y^2(t)}{2E_{y0}^2}-\frac{E_x(t)E_y(t)}{E_{x0}E_{y0}}\cos\phi=\sin^2\phi$$

显然,这是一个椭圆方程。这说明一般均匀平面波的电场强度的轨迹为椭圆。椭圆极化波如图 5-28 所示。线极化和圆极化都是椭圆极化的特例。类同于右旋、左旋圆极化波定义,当琼斯矢量的 $x$ 分量相位超前 $y$ 分量时,即 $\phi>0$,为右旋椭圆极化波,如图 5-28 所示;反之,当琼斯矢量的 $x$ 分量滞后 $y$ 分量时,即 $\phi<0$,为左旋椭圆极化波。

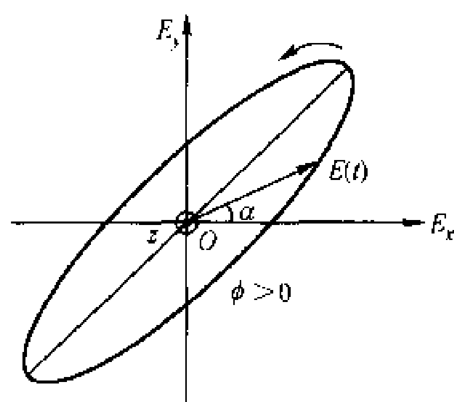



图 5-28 椭圆极化波

琼斯矢量可以有效地描述均匀平面波的极化状态。通常定义归一正交化琼斯矢量,如:

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{5-135}$$

和

$$\hat{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{5-136}$$

就是一对由线极化波构成的单位正交基,它们的模为 1,且 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 正交,即 $\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Y}}=\hat{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}=0$。同理,也可以选归一化右旋和左旋圆极化波为一组单位正交基,即:

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{j}\end{bmatrix} \tag{5-137}$$

和

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{j}\end{bmatrix} \tag{5-138}$$

它们的模也为 1。由式(5-137)和(5-138),得:

$$\hat{\boldsymbol{R}}^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{L}}=\frac{1}{2}[1\quad \mathrm{j}]\begin{bmatrix}1\\\mathrm{j}\end{bmatrix}=0,\qquad \hat{\boldsymbol{L}}^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{2}[1\quad -\mathrm{j}]\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{j}\end{bmatrix}=0$$

即 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 也是一组单位正交基。因此,任意一个均匀平面电磁波的琼斯矢量均能展开成为两个相互正交的线极化波或右旋圆极化波与左旋圆极化波叠加的形式。

**例 5-10** 设空气中的均匀平面电磁波为 $\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y100\sin(\omega t-kx)-\boldsymbol{e}_z200\cos(\omega t-kx)$ V/m。试分析该电磁波的极化特性。

[**解**] 由 $\boldsymbol{E}(x,t)$ 表达式知,该电磁波的传播方向为 $x$ 方向,当 $x=0$ 时,

得

$$\frac{E_y^2(t)}{100^2}+\frac{E_z^2(t)}{200^2}=1$$

描绘图 5-29,由图可知,该电磁波为右旋椭圆极化波。

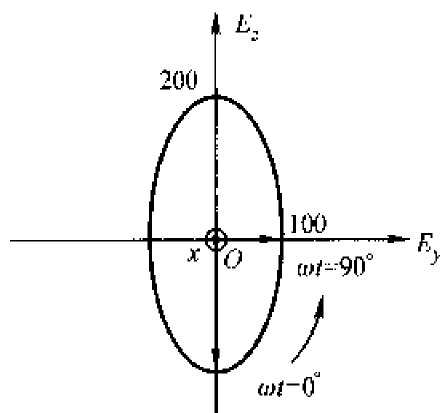



图 5-29 旋向判断

**例 5-11** 试讨论线极化正交基 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 与圆极化正交基 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 的变换关系。

**[解]** 式(5-137)和(5-138)可以写为:

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{X}}-\mathrm{j}\hat{\boldsymbol{Y}}),\quad \hat{\boldsymbol{L}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{X}}+\mathrm{j}\hat{\boldsymbol{Y}})$$

经过简单计算,得:

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{R}}+\hat{\boldsymbol{L}}),\quad \hat{\boldsymbol{Y}}=\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{R}}-\hat{\boldsymbol{L}})$$

由以上讨论可以看出,任意一个均匀平面电磁波均可以分解为右旋圆极化波与左旋圆极化波的叠加。

## 5.7.3 琼斯矩阵

琼斯矩阵法是分析均匀平面电磁波在一些器件中传输的有效方法。在这一方法中,波的极化特性用一个 2 阶列矩阵(琼斯矢量)表示,而每个均匀平面电磁波器件则用称为琼斯矩阵的 2×2 阶方阵来表示。从而对于整个均匀平面电磁波传输系统,总琼斯矩阵可以通过各个器件的琼斯矩阵相乘获得,而透射波的极化特性可以通过总琼斯矩阵与入射波的琼斯矢量相乘算得。在琼斯矩阵法中,假定在各个器件的两端面上均无反射波存在,即电磁波全部透过各个端面。

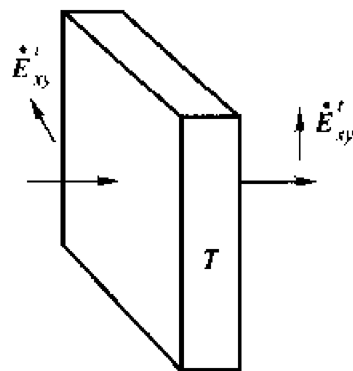



图 5-30 平面波器件

图 5-30 为一个均匀平面波器件,设其琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}$$

则透射波的琼斯矢量为

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{t}_{xy}=\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{E}}^{i}_{xy} \tag{5-139}$$

对于图 5-31 存在两个器件的情况,则透射波的琼斯矢量为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{xy}^{t} = \boldsymbol{T}_2 \dot{\boldsymbol{E}}_{xy}^{m} = \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_1 \dot{\boldsymbol{E}}_{xy}^{i}$$

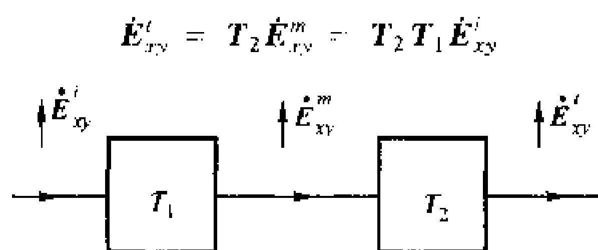



图 5 31 两个平面波器件

所以，该系统总琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_1 \tag{5-140}$$

可见，应用琼斯矩阵法可以使均匀平面波的传输计算变得十分简单，只要找出器件的琼斯矩阵即可。

### 5.7.4 均匀平面电磁波在各向异性介质中的传播

各向异性介质常用来制作各种平面电磁波器件，如光学中的晶体和光学玻璃、微波中的外加恒定磁场的铁氧体与等离子体等都呈现出各向异性的性质。对于各向异性介质，介电常数 $\varepsilon$ 和磁导率 $\mu$ 应分别表示为相应的三维二阶张量，即介电张量 $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$ 和磁导率张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$，从而媒质特性的构成方程应表示为：

$$\begin{bmatrix} \dot{D}_x \\ \dot{D}_y \\ \dot{D}_z \end{bmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_x \\ \dot{B}_y \\ \dot{B}_z \end{bmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix}$$

基于麦克斯韦方程组，可以全面分析均匀平面波在各向异性介质中的传播规律，但这些内容已超出本教材范围。在此仅概括地介绍其传播规律，不作推导。

相位延迟板（也称波片）是用各向异性介质制作的，它可以改变均匀平面波的极化状态。对于相位延迟板，在垂直于传播方向的平面上，取决于相速的差异，存在着所谓“快轴 $f$”和“慢轴 $s$”两个正交方向，如图 5－32 所示。由于沿快轴 $f$ 和慢轴 $s$ 的相对介电常数不同，使平行于快轴方向的线极化波的相速高于平行于慢轴方向的线极化波。从而，导致快轴方向与慢轴方向的两个线极化波产生相对的相位延迟（相位差）$\Gamma$，这种效应被称为双折射效应。在图 5－32 所示的 $sOf$ 坐标系下，它的琼斯矩阵为

$$T'_{\Gamma} = \begin{bmatrix} e^{-j\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{j\Gamma/2} \end{bmatrix} \qquad (5-141)$$

式中，$\Gamma$ 不仅与介质有关，还与波长和波片厚度有关。图 5-32 中的角 $\alpha$ 被称为波片的方位角。由于 $xOy$ 坐标系和 $sOf$ 坐标系存在如下正交变换关系

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_s \\ \dot{E}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{bmatrix} \qquad (5-142)$$

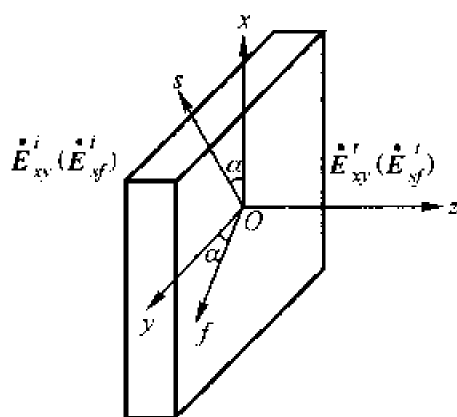


图 5-32　相位延迟板

式中变换矩阵记为

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (5-143)$$

由 $\dot{E}^t_{sf} = T'_{\Gamma}\dot{E}^i_{sf}$，得 $R(\alpha)\dot{E}^t_{xy} = T'_{\Gamma}R(\alpha)\dot{E}^i_{xy}$，即

$$\dot{E}^t_{xy} = R^{-1}(\alpha)T'_{\Gamma}R(\alpha)\dot{E}^i_{xy}$$

所以波片在 $xOy$ 坐标系下的琼斯矩阵为

$$T_{\Gamma} = R^{-1}(\alpha)T'_{\Gamma}R(\alpha) \qquad (5-144)$$

通常称 $\Gamma=\pi$ 的波片为 $\lambda/2$ 波片，它的琼斯矩阵记为 $T_{\frac{\lambda}{2}}$；称 $\Gamma=\pi/2$ 的波片为 $\lambda/4$波片，它的琼斯矩阵记为 $T_{\frac{\lambda}{4}}$。

对于某些各向异性介质，如锗酸铋($Bi_{12}GeO_{20}$)、硅酸铋($Bi_{12}SiO_{20}$)和铌酸锂($LiNbO_3$)等晶体，在适当方向上施加电场 $E_0$ 后，将产生双折射效应，称这种效应为电光效应。当电光效应与外加电场呈线性关系时，称为泡克尔斯效应，即

$$\Gamma = k_e l E_0 \qquad (5-145)$$

式中，$k_e$ 是由各向异性介质和波长确定的常数，$l$ 为均匀平面波在各向异性介质中的波程长度。显然，借助于各向异性介质的泡克尔斯效应可以控制均匀平面波的极化状态或测量电场或电压。

**例 5-12**　试证明 $\lambda/2$ 波长波片可以改变线极化波的极化方向，可以使右旋圆极化波与左旋圆极化波相互转化。

**[证]**　设 $\lambda/2$ 波片中的方位角为 $\alpha$，由式(5-144)，得

$$T_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = j\begin{bmatrix} -\cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

取入射波是 $x$ 方向的线极化波，则透射波的琼斯矢量为

$$\dot{E}^t_{xy} = T_{\lambda/2}\dot{E}^i_{xy} = j\begin{bmatrix} -\cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -j\begin{bmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{bmatrix}$$

显然，$\lambda/2$ 波片使线极化波的极化方向旋转了 $2\alpha$。特别是当 $\alpha=\pi/4$ 时，$\lambda/2$ 波片可以使 $x$ 方向的线极化波转化为 $y$ 方向的线极化波。又取入射波为右旋圆极化波，则透射波的琼斯矢量为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{xy}^{t} = \boldsymbol{T}_{\lambda/2}\hat{\boldsymbol{R}} = \mathrm{j}\begin{bmatrix}\cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha)\\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha)\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{j}\end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\alpha}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{j}\end{bmatrix} = -\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\alpha}\hat{\boldsymbol{L}}$$

上式表明透射波为左旋圆极化波；同理，当入射波为左旋圆极化波时，透射波为右旋圆极化波。证毕。

**例 5－13** 试证明方位角 $\alpha=\pi/4$ 的 $\lambda/4$ 波片可以将 $y$ 方向线极化波转换成左旋圆极化波，将 $x$ 方向线极化波转换成右旋圆极化波。

**[证]** 由式(5－144)，得

$$\boldsymbol{T}_{\lambda/4} = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{j}\\ -\mathrm{j} & 1\end{bmatrix}$$

当入射波为 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 时，则透射波为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{xy}^{t} = \boldsymbol{T}_{\lambda/4}\hat{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{j}\\ -\mathrm{j} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{j}\end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{R}}$$

当入射波为 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 时，则透射波为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{xy}^{t} = \boldsymbol{T}_{\lambda/4}\hat{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{j}\\ -\mathrm{j} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-\mathrm{j}\\ 1\end{bmatrix} = -\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{j}\end{bmatrix} = -\mathrm{j}\hat{\boldsymbol{L}}$$

证毕。

各向异性介质的另一种效应是右旋圆极化波的相速与左旋圆极化波的相速在介质中不同。当入射波为线极化波时，由于线极化波可以分解为右旋圆极化波和左旋圆极化波。当这两个不同相速的圆极化波离开该介质时，这两个圆极化波将合成一个极化方向相对于入射波极化方向产生偏转的线极化波。也就是说，线极化波的极化方向通过介质后发生了旋转，如图 5－33 所示。$\varphi$ 称为旋转角，它与各向异性介质、波长和波在该介质中的传播距离有关。它的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{\varphi} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{5－146}$$

对于微波中的铁氧体和等离子体等、光学中的锗酸铋($Bi_{12}GeO_{20}$)、硅酸铋($Bi_{12}SiO_{20}$)等晶体和一些磁性玻璃等各向异性介质，当在均匀平面电磁波的传播方向上施加磁场时，线极化波的极化方向发生旋转，即

$$\varphi = V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l} \tag{5－147}$$

式中，$V$ 为维尔德常数，$\boldsymbol{B}$ 为外加磁场的磁感应强度。这种效应被称为法拉第

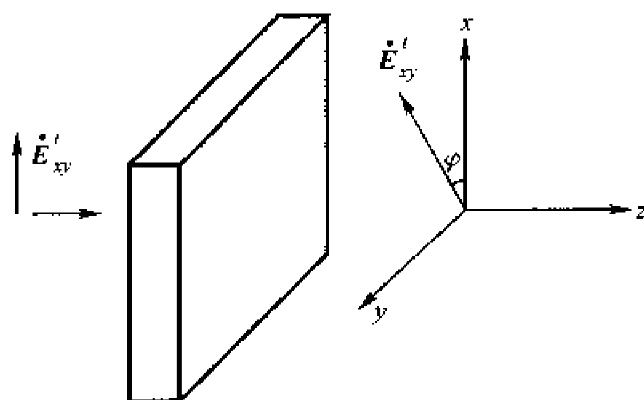



图 5－33　极化方向的旋转

效应。借助于法拉第效应，可以控制线极化波的极化方向或测量磁场或电流。

## 5.8　有损媒质中的均匀平面电磁波

以上各节集中讨论了均匀平面电磁波在理想介质中的传播规律。然而，电介质中极化损耗的存在，以及导体中存在能量损耗，使实际的电介质与导体均应归类为有损媒质。本节将讨论均匀平面电磁波在有损媒质中的传播规律。

### 5.8.1　波动方程及其解

对于时谐电磁场，在无源有损媒质空间中，麦克斯韦方程组可写为：

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}} = \gamma \dot{\boldsymbol{E}} + \mathrm{j}\omega \bar{\varepsilon} \dot{\boldsymbol{E}} = \mathrm{j}\omega \bar{\varepsilon}_c \dot{\boldsymbol{E}} \qquad (5-148a)$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega \bar{\mu} \dot{\boldsymbol{H}} \qquad (5-148b)$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad (5-148c)$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}} = 0 \qquad (5-148d)$$

式中，$\bar{\varepsilon}$ 和 $\bar{\mu}$ 分别为媒质的复介电常数和复磁导率，如式(5－15)和(5－16)所示。$\bar{\varepsilon}_c$ 为有损媒质的等效复介电常数，如式(5－17)所示。为简化分析，忽略媒质的磁化损耗，即 $\bar{\mu} = \mu$。从上述麦克斯韦方程组可以导出有损媒质的波动方程为：

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}} + k_c^2 \dot{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad (5-149)$$

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{H}} + k_c^2 \dot{\boldsymbol{H}} = 0 \qquad (5-150)$$

式中，$k_c$ 为有损媒质的传播系数，它是一个复数，由下式确定

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \bar{\varepsilon}_c \qquad (5-151)$$

不难看出，有损媒质中的波动方程(5－149)和(5－150)与理想介质中的波动方

程(5-80)和(5-81)同形。因此，它们的解也应同形。设均匀平面电磁波的电场强度矢量与 $x$ 轴平行，且沿 $z$ 轴方向传播，则波动方程(5-149)和(5-150)的解为：

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+}e^{-jk_c z} + \dot{E}_{x0}^{-}e^{jk_c z} \tag{5-152}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{\eta_c}e^{-jk_c z} - \frac{\dot{E}_{x0}^{-}}{\eta_c}e^{jk_c z} \tag{5-153}$$

式中，$\eta_c$ 为有损媒质的特性阻抗(波阻抗)，它也是一个复数，即

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\dot{\varepsilon}_c}} \tag{5-154}$$

## 5.8.2 传播系数与波阻抗

由于等效复介电常数 $\dot{\varepsilon}_c$ 是一个与频率相关的复数，因此，式(5-151)的传播系数 $k_c$ 和式(5-154)的波阻抗 $\eta_c$ 也是与频率相关的复数。假设：

$$k_c = k'(\omega) - jk''(\omega) \tag{5-155}$$

$$\eta_c = |\eta_c|e^{j\theta} \tag{5-156}$$

则式(5-152)和(5-153)解中的入射波为：

$$\dot{E}_x^{+} = \dot{E}_{x0}^{+}e^{-k''(\omega)z}e^{-jk'(\omega)z} \tag{5-157}$$

$$\dot{H}_y^{+} = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_c|}e^{-k''(\omega)z}e^{-j[k'(\omega)z+\theta]} \tag{5-158}$$

可见，由于媒质的损耗，入射波的振幅随着波的行进按指数规律衰减，且磁场强度在相位上滞后电场强度，如图5-34所示。式(5-155)中的系数 $k''(\omega)$ 被称为有损媒质的衰减系数。由式(5-151)解得：

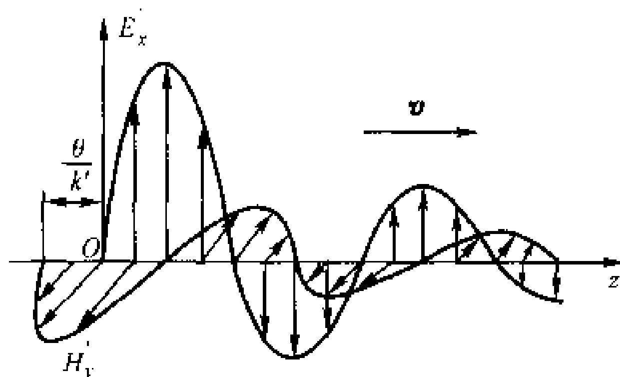



图 5-34 有损媒质的入射波

$$k' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+\omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon'}\right)^2}+1\right]} \tag{5-159}$$

$$k'' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+\omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon'}\right)^2}-1\right]} \tag{5-160}$$

可见，在有损媒质中，相位系数 $k'(\omega)$ 不再是频率的线性函数，从而导致均匀平面波的相速也不再是常数，而是频率的函数。通常由于信号是由不同的频率成分组成的，当载有信号的均匀平面波在有损媒质中传播时，不同频率成分因相速不同产生相位差，最终导致信号的失真。对于数字信号将产生误码。这种现象称为有损媒质的色散现象，因此，有损媒质又称为色散媒质。

### 5.8.3 低损耗介质情况

对于低损耗介质，式(5-18)定义的介质损耗角正切 $\tan\delta \ll 1$，故式(5-159)和(5-160)可以简约为：

$$k' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\tan^2\delta}+1\right]} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1+\frac{1}{8}\tan^2\delta\right) \tag{5-161}$$

$$k'' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\tan^2\delta}-1\right]} \approx \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{2}\tan\delta \tag{5-162}$$

均匀平面电磁波的相速为

$$v = \frac{\omega}{k'} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}}\left(1-\frac{1}{8}\tan^2\delta\right)$$

由此可见，对于低损耗介质，电磁波的相速近似等于理想介质中的相速，只是振幅沿传播方向略有衰减。

### 5.8.4 良导体情况

称 $\gamma \gg \omega\varepsilon'$ 的导电媒质为良导体，此时 $\tan\delta \gg 1$。由于可以忽略 $\varepsilon''$ 的影响，所以对于良导体情况，书写中不再区别 $\varepsilon'$ 和 $\varepsilon$。由式(5-159)和(5-160)，可得

$$k' = k'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \tag{5-163}$$

式(5-154)的波阻抗为

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{5-164}$$

可见，在良导体中，磁场强度分量在相位上滞后电场强度 $\pi/4$。由式(5-163)可见，电磁波在良导体中衰减很快。为了反映衰减程度，与衰减系数

$k''$相关联，工程上定义了透入深度（或称集肤深度）$d$，即

$$d = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \tag{5-165}$$

应指出，上式等同于由准静态场4.3.1节讨论所得的式（4-38），且赋有对电的集肤效应更为明晰的物理解释。

铜导体是工程上广泛使用的一种良导体，其 $\gamma = 5.8\times10^7$ S/m。当 $f = 50$ Hz时，$d = 9.45$ mm；当 $f = 1$ MHz时，$d = 66.7$ $\mu$m；当 $f = 100$ MHz时，$d = 6.67$ $\mu$m。所以，在高频下，铜可以作为优异的屏蔽材料。

在工程中，由式（5-164）给出的波阻抗又被称为良导体的表面阻抗。设良导体表面电场切向分量为 $\dot{E}_{x0}$，如图5-35所示，则导体表面的电流密度为 $\dot{J}_{x0} = \gamma\dot{E}_{x0}$，导体内任意点的电流密度为 $\dot{J}_x = \gamma\dot{E}_{x0}e^{-jk_c z}$。这样，在导体单位宽度内

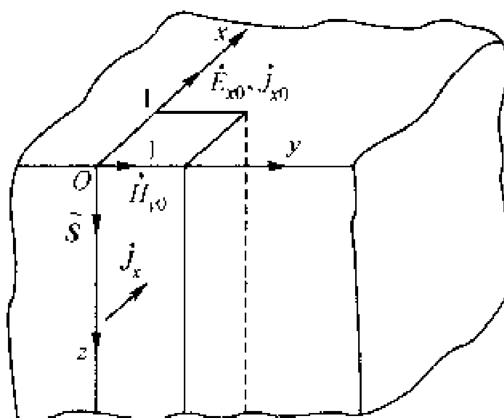



图5-35 平表面良导体中电流的集肤效应

（$0\leqslant y\leqslant1$）分布在电磁波传播方向上（$0\leqslant z\leqslant\infty$）的电流为

$$\dot{I}_s = \int_0^{+\infty} dz \int_0^1 \dot{J}_x dy = j\frac{\gamma\dot{E}_{x0}}{k_c}$$

将式（5-163）代入上式中的 $k_c$，并整理得

$$\dot{I}_s = \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu}}e^{-j\frac{\pi}{4}}\dot{E}_{x0} = \frac{\dot{E}_{x0}}{Z_S} \tag{5-166}$$

式中

$$Z_S = \eta_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+j) = \frac{1+j}{\gamma d} = R_S + jX_S \tag{5-167}$$

其中

$$R_S = X_S = \frac{1}{\gamma d} \tag{5-168}$$

由式(5-166)可知,基于电的集肤效应,流经良导体的正弦交变电流 $\dot{I}_s$ 可以用分布在导体表面层的表面电流来等效,其等效面电流密度即为导体表面切向电场强度除以导体的表面阻抗(波阻抗)$Z_S$,如式(5-166)所示。从式(5-168)还可进一步看出,事实上,平表面导体的表面电阻 $R_S$ 是导体沿电流方向取表面层截面为($d\times1$)所对应的单位长度电阻,此即有效电阻(或交流电阻)的概念所在。利用表面电流和表面阻抗的概念,可以方便地计算电磁波垂直进入导体的功率面密度,即

$$P_S = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_{x0}\times\dot{\boldsymbol{H}}_{y0}^*] = R_S I_s^2 \tag{5-169}$$

**例 5-14** 湖水 $\gamma_1=4\times10^{-3}$ S/m,$\varepsilon_{r1}=81$;海水 $\gamma_2=4$ S/m,$\varepsilon_{r2}=81$。求频率为 10 MHz 电磁波在湖水和海水中的透入深度(设 $\mu=\mu_0$)。

[**解**] 对于湖水,在 10 MHz 下

$$\tan\delta = \frac{\gamma_1}{\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} = \frac{4\times10^{-3}}{2\pi\times10^7\times81\times8.85\times10^{-12}} \approx 8.88\times10^{-2} \ll 1$$

可见,湖水在 10 MHz 下可以看作低损耗介质,由式(5-162)及透入深度定义,得

$$d = \frac{1}{k''} = \frac{2}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\tan\delta} = \frac{2\times3\times10^8}{2\pi\times10^7\times\sqrt{81}\times8.88\times10^{-2}}\ \mathrm{m} \approx 12\ \mathrm{m}$$

而对于海水,在 10 MHz 下

$$\tan\delta = \frac{\gamma_2}{\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = \frac{4}{2\pi\times10^7\times81\times8.85\times10^{-12}} \approx 88.8 \gg 1$$

在 10 MHz 下,海水可以视作良导体,由式(5-165)得

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma_2}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^7\times4\pi\times10^{-7}\times4}}\ \mathrm{m} \approx 0.08\ \mathrm{m}$$

这说明,10 MHz 的电磁波难以在海水中传播,但在湖水中可以采用这个频率进行水下通信。

## 5.9 导引电磁波

前面各节主要讨论了均匀平面电磁波在无限大空间的传播规律。在工程上,除了在无限大空间的这种定向传播外,还需要让电磁波沿着人们设计的路径(路径可以是弯曲的)从一点传输到另一点。实现这种功能的系统被称为电磁波的导波系统。值得指出的是,通过导波系统还可将电磁波封闭在一定的空间内,以实现信息的保密和频道的复用。常用的导波系统有传输线、微带、波导和光纤等。本节将简要地讨论同轴电缆、平行板波导、矩形波导和谐振腔的导波原理。

### 5.9.1 非均匀平面电磁波

取 $z$ 轴为传播方向，平面电磁波的电场强度和磁场强度可写为：

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{5-170}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{5-171}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0}$和 $\dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0}$是平面电磁波在等相位面上的二维电场强度矢量和二维磁场强度矢量，一般是 $x$ 和 $y$ 的函数，称这种振幅在等相位面上不是常量的平面电磁波为非均匀平面电磁波。为分析方便起见，将算子$\nabla$写成如下形式

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{5-172}$$

式中，$\nabla_{\perp}$ 为垂直于传输方向 $z$ 轴平面上的二维算子。在无源空间中，式(4－146)麦克斯韦方程可以写为

$$\begin{aligned}\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} &= \left(\nabla_{\perp} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \\ &= (\nabla_{\perp} \times \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \boldsymbol{e}_z \times \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0}(-\mathrm{j}k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \\ &= -\mathrm{j}\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\end{aligned}$$

比较上式两端，得：

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0} = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0} \tag{5-173}$$

$$\nabla_{\perp} \times \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0} = 0 \tag{5-174}$$

不难看出，式(5－173)与均匀平面电磁波的式(5－94)相同。也就是说在等相位面的任意点上，非均匀平面电磁波的电场强度、磁场强度和波矢量在空间上仍然满足右手螺旋关系，且电场强度与磁场强度振幅之比为波阻抗。

同理，将其余三个麦克斯韦方程展开，可得：

$$\nabla_{\perp} \times \dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0} = 0 \tag{5-175}$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}_{\perp 0} = 0 \tag{5-176}$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \dot{\boldsymbol{B}}_{\perp 0} = 0 \tag{5-177}$$

从式(5－174)—(5－177)可以看出，平面电磁波横向电场强度 $\dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0}$和横向磁场强度 $\dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0}$满足的方程与平行平面静态电磁场的方程相同。这说明能够建立平行平面静态电磁场的系统一定能够导引平面电磁波。例如，各类均匀传输线主要用来导引平面电磁波，但它们均可以建立静态电磁场。

**例 5－15** 已知半无限长同轴电缆内外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，激励电源的角频率为 $\omega$，内外导体间电压为 $\dot{U}_0$，电流为 $\dot{I}_0$。试求同轴电缆内非均匀平面电

磁波的分布。

［**解**］ 设 $z$ 轴为电磁波传播方向，且同轴电缆内充满均匀理想介质。由于非均匀平面电磁波的横向电场和横向磁场与同轴电缆内的静态电磁场分布相同，故由静态电磁场可知：

$$\boldsymbol{E}_{\perp 0} = \boldsymbol{e}_\rho \frac{U_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad \boldsymbol{H}_{\perp 0} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{I_0}{2\pi\rho}$$

所以，同轴电缆内非均匀平面电磁波分布为：

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\dot{U}_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \quad \dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\dot{I}_0}{2\pi\rho} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

顺便指出，既可以用电磁波理论也可以用分布参数电路理论来研究传输线问题。这可以通过考察波阻抗和相速来说明。首先，由本章分析可知波阻抗

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{|\dot{\boldsymbol{E}}_{\perp 0}|}{|\dot{\boldsymbol{H}}_{\perp 0}|} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0}$$

可得

$$\frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

而由静态电磁场的分析得知，本例同轴电缆的单位长度的电容 $C_0$ 和单位长度的电感 $L_0$ 分别为：

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

因此，从另一方面分布参数电路理论可知

$$\frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

电压和电流行波的相速为

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

显然，两种理论获得的结果是一致的。在工程中，人们更偏爱应用分布参数电路理论研究传输线问题。

### 5.9.2 平行板波导

图 5－36 为一平行板波导（简称平板波导）。设上下板为理想导体板，板宽

$a$远大于板间距离 $b$，且在 $z$ 轴方向无限延展。因此，就平板波导中间区域的电磁场分布而言，可设场量与 $x$ 无关，即$\frac{\partial}{\partial x}=0$，且沿 $z$ 轴方向传播，波数为 $k_z$。将麦克斯韦方程组中的两旋度方程展开，并消去 $e^{-jk_z z}$因子，得：

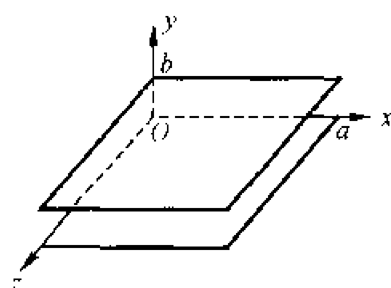



图 5－36　平板波导

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}+jk_z\dot{H}_y=j\omega\varepsilon\dot{E}_x \quad (5-178)$$

$$-jk_z\dot{H}_x=j\omega\varepsilon\dot{E}_y \quad (5-179)$$

$$-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon\dot{E}_z \quad (5-180)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}+jk_z\dot{E}_y=-j\omega\mu\dot{H}_x \quad (5-181)$$

$$-jk_z\dot{E}_x=-j\omega\mu\dot{H}_y \quad (5-182)$$

$$-\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y}=-j\omega\mu\dot{H}_z \quad (5-183)$$

由式(5－178)和(5－182)，可得

$$\dot{E}_x=-\frac{j\omega\mu}{k^2-k_z^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \quad (5-184)$$

$$\dot{H}_y=-\frac{jk_z}{k^2-k_z^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \quad (5-185)$$

同理，由式(5－179)和(5－181)，得：

$$\dot{E}_y=-\frac{jk_z}{k^2-k_z^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \quad (5-186)$$

$$\dot{H}_x=\frac{j\omega\varepsilon}{k^2-k_z^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \quad (5-187)$$

式中，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$是电磁波在无限大空间的波数。

尽管平板波导是一种均匀传输线，然而，式(5－184)—(5－187)表明，该导波系统还可以导引其他形式的电磁波。如式(5－184)和(5－185)表明，沿电磁波传输方向的纵向磁场可以产生横向电场和横向磁场，这种在传输方向上仅存在纵向磁场的电磁波被称为横电波（简称 TE 波）或磁波（简称 H 波）；而式(5－186)和(5－187)表明，纵向电场也可以产生横向电场和横向磁场，这种在传输方向上仅存在纵向电场的电磁波被称为横磁波（简称 TM 波）或电波（简称 E 波）。因此，对于一个导波系统，可能存在三种波型，即 TEM 波、TE 波和 TM 波。

下面重点分析平板波导中的 TE 波和 TM 波。首先讨论 TE 波，由波动方程(5－81)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_z}{\mathrm{d}y^2} - k_z^2\dot{H}_z + k^2\dot{H}_z = 0$$

引入 $y$ 方向波数 $k_y$，使其满足

$$k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{5－188}$$

则

$$\dot{H}_z = A\sin(k_y y) + B\cos(k_y y)$$

将上式代入式(5－184)，得

$$\dot{E}_x = -\mathrm{j}\frac{\omega\mu}{k_y}[A\cos(k_y y) - B\sin(k_y y)]$$

由图 5－36 知，当 $y=0$ 和 $y=b$ 时，$\dot{E}_x=0$，代入上式，得非零条件为：

$$A = 0,\quad B = \dot{H}_0$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b},\ n = 1,2,3\cdots \tag{5－189}$$

$k_y$ 被称为平板波导的特征值。所以，TE 波的电磁场为：

$$\dot{H}_z(y,z) = \dot{H}_0\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{5－190}$$

$$\dot{E}_x(y,z) = \mathrm{j}\frac{\omega\mu b}{n\pi}\dot{H}_0\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{5－191}$$

$$\dot{H}_y(y,z) = \mathrm{j}\frac{bk_z}{n\pi}\dot{H}_0\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{5－192}$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2} \tag{5－193}$$

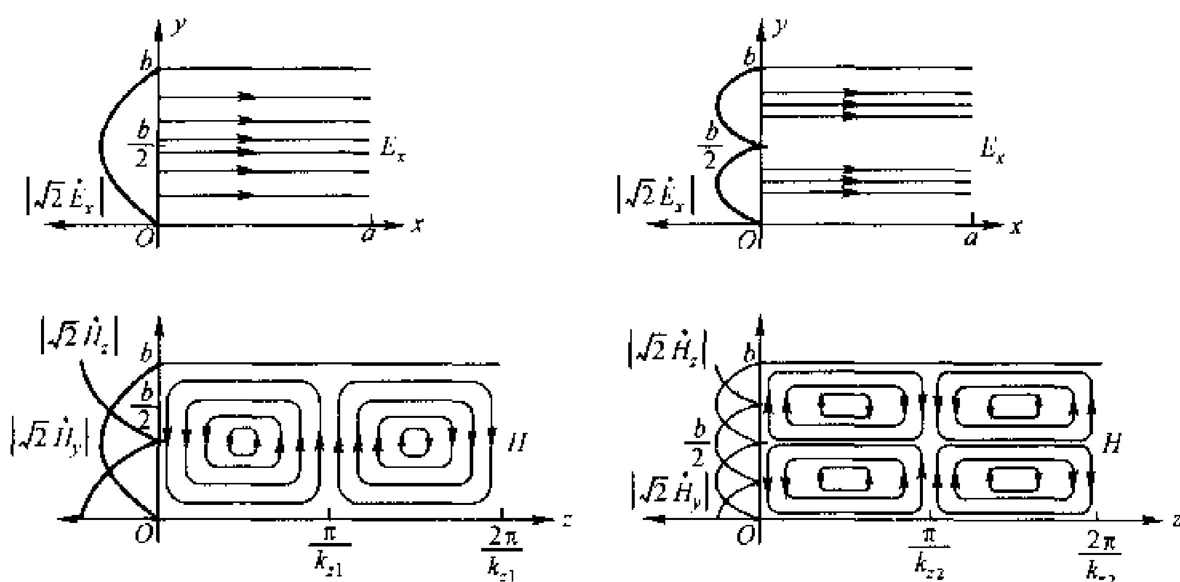
需要注意的是，在式(5－193)—(5－197)中，$n\neq0$。也就是说，当 $n=0$ 时，不存在电磁波。图 5－37 分别画出了 $n=1$ 和 $n=2$ 时的波型场图。

从图 5－37 和式(5－190)—(5－192)不难看出，在横向 $y$ 方向上电磁场呈驻波分布，$n$ 为横向 $y$ 方向的半波长数。对应于不同 $n$ 值的 TE 波型，称为 $\mathrm{TE}_n$ 波。由波的传播规律可知，当 $k_z$ 为零或虚数时，电磁波不能传播。因此，由式(5－193)表明，$\mathrm{TE}_n$ 波的截止条件为

$$\lambda_{cn} = \frac{2b}{n} \tag{5－194}$$

式中，$\lambda_{cn}$称为 $\mathrm{TE}_n$ 波的截止波长，其对应的截止频率为

$$f_{cn} = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5－195}$$




(a) $TE_1(n=1)$波型　　　　(b) $TE_2(n=2)$波型

图 5-37　TE 波型场图

这说明，惟有 $\lambda<\lambda_{cn}$ 或 $f>f_{cn}$ 的电磁波才能在平板波导中以 $TE_n$ 波型传播。显然，在平板波导中，TE 波型中的最低阶波型为 $TE_1$ 波，其对应的截止波长最长，截止频率也最低。

除通过求解波动方程的方法外，也可以通过均匀平面电磁波在理想导体平板内的全反射来分析平板波导问题。下面以 TM 波为例，说明这种分析方法。

图 5-38 显示了均匀平面电磁波以平行极化方式入射理想导体平板的情

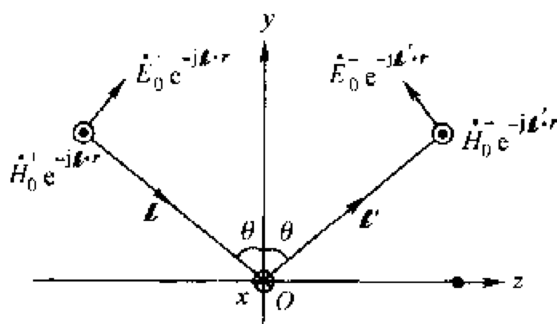



图 5-38　平行极化情况

况。波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 可以写为：

$$\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{e}_y k\cos\theta+\boldsymbol{e}_z k\sin\theta,\ \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{e}_y k\cos\theta+\boldsymbol{e}_z k\sin\theta$$

入射波电场强度和磁场强度为：

$$\dot{\boldsymbol{E}}^+=\boldsymbol{e}_y\dot{E}_0^+\sin\theta e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{e}_z\dot{E}_0^+\cos\theta e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}^+=\boldsymbol{e}_x\frac{\dot{E}_0^+}{\eta}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

反射波电场强度和磁场强度为：

$$\dot{\boldsymbol{E}}^- = \boldsymbol{e}_y \dot{E}_0^- \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}^-\cdot\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{e}_z \dot{E}_0^- \cos\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}^-\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}^- = \boldsymbol{e}_x \frac{\dot{E}_0^-}{\eta} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}^-\cdot\boldsymbol{r}}$$

在 $y=0$ 的理想导体边界上有 $\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{E}}=0$，即 $\dot{E}_0^- = -\dot{E}_0^+$，故合成电场强度和磁场强度分别为：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}^+ + \dot{\boldsymbol{E}}^- &= \boldsymbol{e}_y \dot{E}_0^+ \sin\theta\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-ky\cos\theta + kz\sin\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(ky\cos\theta + kz\sin\theta)}\right] + \\ &\quad \boldsymbol{e}_z \dot{E}_0^+ \cos\theta\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-ky\cos\theta + kz\sin\theta)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(ky\cos\theta + kz\sin\theta)}\right] \qquad (5-196)\\ &= \left[\boldsymbol{e}_y 2\dot{E}_0^+ \sin\theta\cos(ky\cos\theta) + \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}2\dot{E}_0^+ \cos\theta\sin(ky\cos\theta)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\sin\theta}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{H}}^+ + \dot{\boldsymbol{H}}^- &= \boldsymbol{e}_x \frac{\dot{E}_0^+}{\eta}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-ky\cos\theta + kz\sin\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(ky\cos\theta + kz\sin\theta)}\right]\\ &= -\boldsymbol{e}_x \frac{2\dot{E}_0^+}{\eta}\cos(ky\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\sin\theta} \qquad (5-197)\end{aligned}$$

从式(5－196)和(5－197)可以看出，合成电场和磁场沿 $z$ 轴方向传播，在 $y$ 轴方向呈驻波分布。电场切向分量（$z$ 分量）在 $y$ 轴方向的波节位置为

$$y = \frac{n\pi}{k\cos\theta},\quad n = 0,1,2\cdots$$

显然，在这些波节位置插入一个与原理想导体板平行的新的理想导体平板，并不会改变场的分布。设两板间距为 $b$，则有

$$\cos\theta = \frac{n\pi}{bk},\quad n = 0,1,2\cdots \qquad (5-198)$$

由式(5－196)和(5－197)，可得导体平板内的电磁场分布为：

$$\dot{E}_z = \dot{E}_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \qquad (5-199)$$

$$\dot{E}_y = -\mathrm{j}\frac{bk_z}{n\pi}\dot{E}_0\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \qquad (5-200)$$

$$\dot{H}_x = -\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon b}{n\pi}\dot{E}_0\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \qquad (5-201)$$

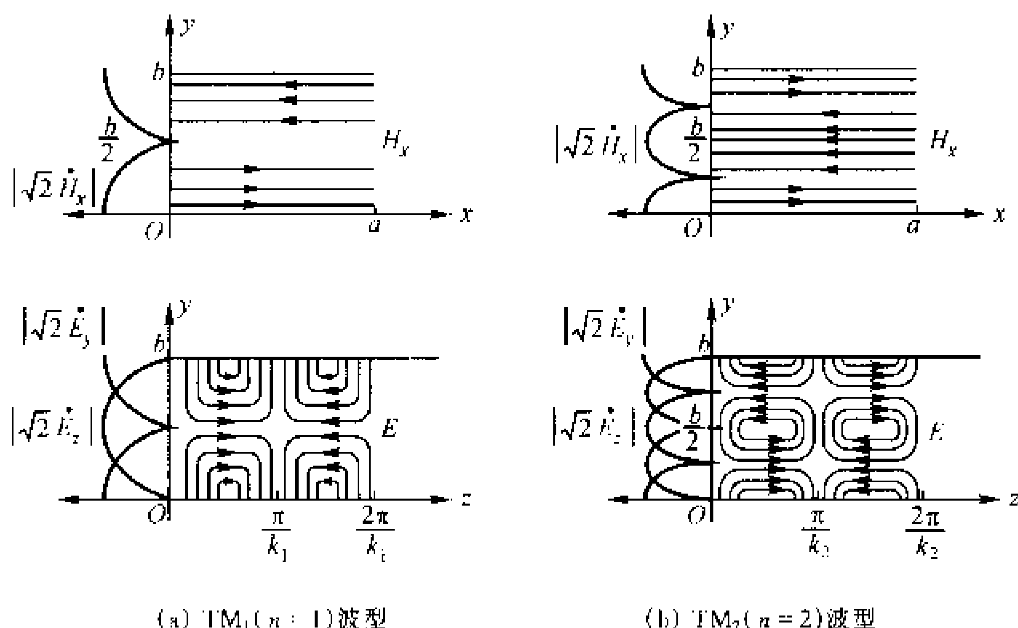
式中：

$$\dot{E}_0 = -\mathrm{j}2\dot{E}_0^+\cos\theta$$

$$k_z = k\sin\theta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2} \qquad (5-202)$$

类似于 $\mathrm{TE}_n$ 波型，由式(5－199)—(5－201)描述的波型被称为 $\mathrm{TM}_n$ 波型。图 5－39画出了 $\mathrm{TM}_1$ 波和 $\mathrm{TM}_2$ 波的波型场图。显然，式(5－202)与式(5－193)相

同，所以，$TM_n$ 波型的截止波长和截止频率也与 $TE_n$ 波型对应相同。

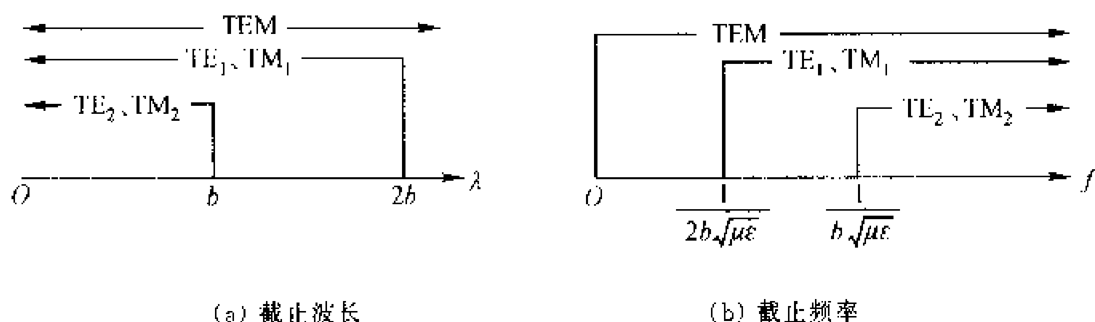



(a) $TM_1$($n=1$)波型　　(b) $TM_2$($n=2$)波型

图 5－39　TM 波型场图

与 $TE_n$ 波型不同的是，在 $TM_n$ 波型中的 $n$ 是可以取零的。从式(5－198)可见，当 $n=0$ 时，相当于入射角等于 90°，而且由式(5－199)看出，$E_z$ 始终等于零，即 TM 波型退化为 TEM 波型。此时，根据式(5－202)可知，$TM_0$(TEM)波型不存在截止波长。

以上分析表明，平板波导不仅可以导引 TEM 波，也可以导引 TE 波和 TM 波。图 5－40 显示在平板波导中各种波型截止波长和截止频率的对应关系。



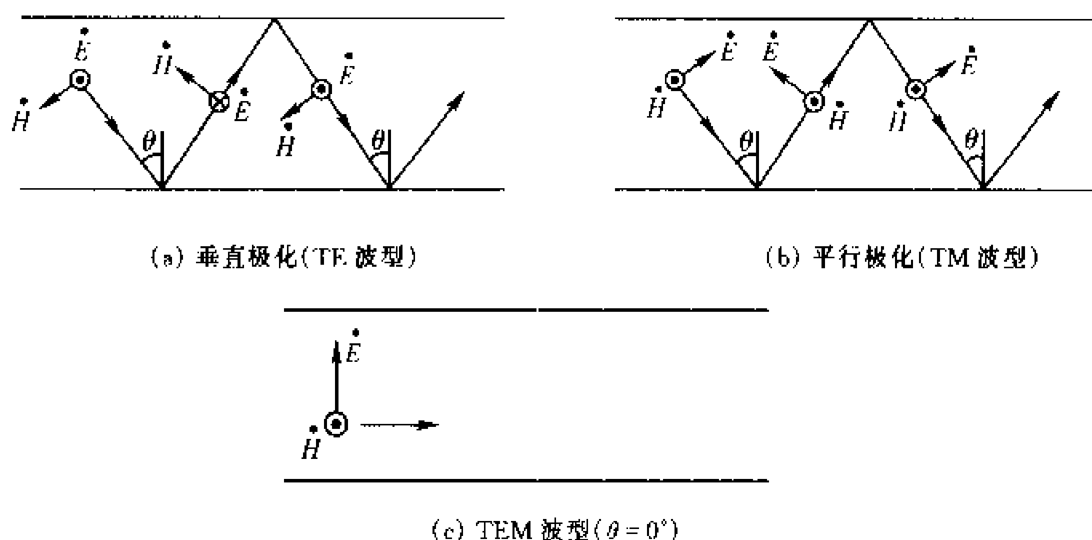

(a) 截止波长　　(b) 截止频率

图 5－40　平板波导中截止波长和截止频率的对应关系

至此可见，在平板波导的波型分析中，既可以采用求解波动方程的方法，也可以采用均匀平面电磁波的入射和反射分析方法。按式(5－198)，当平板波导的板间距 $b$ 和电磁波的波数 $k$ 确定后，入射角 $\theta$ 便决定了波型阶数 $n$，即

$$\theta_n = \arccos\left(\frac{n\pi}{bk}\right)$$

图 5－41 画出了波型与入射角 $\theta$ 的关系。借助于图 5－41 可以更好地理解平板波导的导波机理。




(a) 垂直极化(TE 波型)　　(b) 平行极化(TM 波型)

(c) TEM 波型($\theta = 0°$)

图 5－41　波型与入射角 $\theta$ 的关系

平板波导在工程中应用十分广泛，例如微波技术中的微带线，印刷电路板的接地板和电源板等均可按平板波导分析。

**例 5－16**　间距为 1.25 cm 的微带线内充满空气。试求：(1) $TM_0$、$TE_1$、$TM_1$ 和 $TM_2$ 波的截止频率；(2) 这些波型在 $f = 15$ GHz 时对应的相速度；(3) 当 $f = 25$ GHz 时，该微带线不能传输的最低阶波型。

**[解]**　(1) 由式(5－195)，得：

$$f_{cn} = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{3 \times 10^8 n}{2 \times 1.25 \times 10^{-2}} = 12n \times 10^9 \text{Hz}$$

$$f_{c0} = 0 \text{ Hz}, \ f_{c1} = 12 \text{ GHz}, \ f_{c2} = 24 \text{ GHz}$$

(2) 由式(5－193)，得

$$v_n = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}}$$

$TM_0$(TEM)波：$f_{c0} = 0$ Hz，$v_0 = 3 \times 10^8$ m/s

$TE_1$ 和 $TM_1$ 波：$f_{c1} = 12$ GHz，$v_1 = 5 \times 10^8$ m/s

$TM_2$ 波：$f_{c2} = 24 \text{ GHz} > f = 15$ GHz，此时，该微带线中不存在这个波型。

(3) 可以求出 $TE_3$ 和 $TM_3$ 波的截止频率为 $f_{c3} = 36$ GHz，由于

$$f_{c2} = 24 \text{ GHz} < f = 25 \text{ GHz} < f_{c3} = 36 \text{ GHz}$$

所以，当 $f = 25$ GHz 时，不能传输的最低阶波型为 $TE_3$ 和 $TM_3$ 波。

### 5.9.3　矩形波导与谐振腔

对于平板波导，如果在其两侧再安置两片理想导板就形成一个矩形截面的

理想导体通道，如图 5－42 所示。

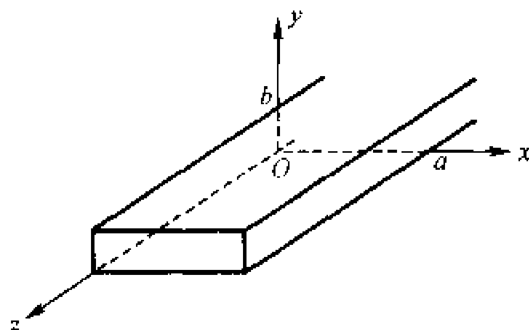



图 5－42　矩形波导

从平板波导中 TE 波的波型场图(图 5－37)不难看出，在安置两片理想导板后，并未改变该处的边界条件，所以也不会改变其内电磁场分布。由此表明，这种矩形截面的理想导体管道可以导引电磁波。这种矩形截面的金属管道称为矩形波导。工程中除矩形波导外，还有许多其他形式的波导，限于篇幅，在此仅对矩形波导作一概略的介绍。

由于在矩形波导内无法建立静态电磁场，因此，矩形波导不能导引 TEM 波，只能导引 TE 波和 TM 波。为记述波型方便，使用 $TE_{mn}$ 和 $TM_{mn}$ 符号，$m$ 和 $n$ 分别代表 TE 波和 TM 波在 $x$ 和 $y$ 方向的半波长数。显然，通过平板波导分析，可以直接获得矩形波导中 $TE_{m0}$ 波型和 $TE_{0n}$ 波型的解。此外，从图 5－39 可见，在平板波导两侧引入两片理想导体板后将会破坏 $TM_n$ 波型的电磁场分布。因此，在矩形波导中不存在 $TM_{m0}$ 波型和 $TM_{0n}$ 波型。当然，也不存在 $TE_{00}$ 波型和 $TM_{00}$ 波型。

可以应用分离变量法在给定边界条件下求解波动方程，获得矩形波导内的波型和对应的电磁场分布。限于篇幅，这里仅讨论矩形波导内的电磁波传播特性。

通过平板波导的分析知道，无论是 TE 波还是 TM 波，都是均匀平面电磁波在两平行板之间入射和反射相叠加后形成的，且在板间横向形成驻波。同理，在矩形波导内电磁场在 $x$ 方向和 $y$ 方向也应呈现驻波分布，由式(5－189)可知，$x$ 方向和 $y$ 方向的波数分别为：

$$k_x = \frac{m\pi}{a},\ k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad m, n = 0,1,2\cdots$$

电磁场仅在 $z$ 方向上呈现行波，波数为 $k_z$。将上述场型规律代入波动方程，得

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0$$

解得

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{5-203}$$

与 $k_z$ 对应的波长被称为波导波长，记为 $\lambda_g$，即

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{5-204}$$

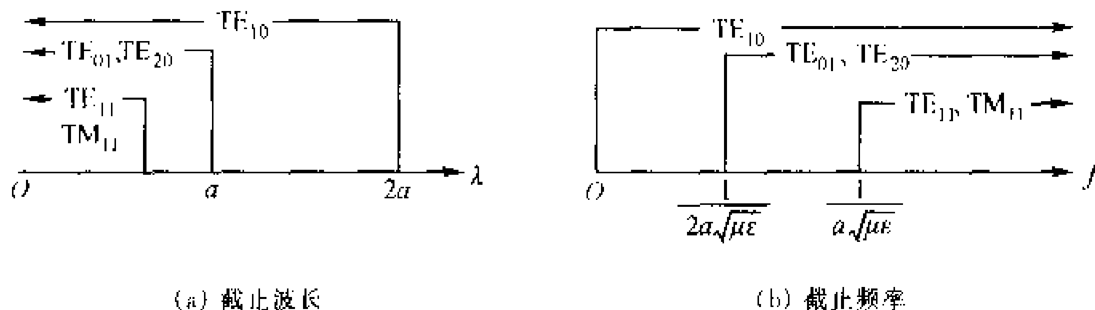
在矩形波导内，电磁波的截止条件为 $k_z=0$，由式(5-203)，得 $TE_{mn}$ 波和 $TM_{mn}$ 波的截止波长 $\lambda_{cmn}$ 和截止频率 $f_{cmn}$ 分别为：

$$\lambda_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}} \tag{5-205}$$

和

$$f_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2} \tag{5-206}$$

一般矩形波导的宽边 $a$ 大于窄边 $b$。由于在 $TE_{mn}$ 波型中的最低阶波型为 $TE_{10}$ 波，而 $TM_{mn}$ 波型中的最低阶波型为 $TM_{11}$。因此，在矩形波导内的所有波型中，最低阶波型为 $TE_{10}$ 波，该波型又被称为矩形波导的主模，而其他波型则被称为矩形波导的高阶模。图 5-43 画出了当 $a=2b$ 时不同波型的截止波长和截止频率分布图。可见在矩形波导内，只要选择适当的频率或选择合适的尺寸，便可实现主模传输，又称为单模传输。




(a) 截止波长　　(b) 截止频率

图 5-43　矩形波导截止波长和截止频率的对应关系

在工程中，广泛采用单模传输。这主要是单模传输具有以下优点：(1)减小信号失真或误码率；(2)在相同截止频率下，$a$ 最小且与 $b$ 无关，节省材料；(3) $TE_{10}$ 波型的截止频率与次高阶波型的截止频率的频率间距最大，可利用的频率范围最宽；(4)波导内单向极化、便于耦合；(5)对于一定的 $\frac{b}{a}$ 比值，损耗最小。

**例 5-17**　一矩形波导截面为 5 cm×4 cm，内部充满空气。试问当 $f=5$ GHz 时，可以传输什么波型的电磁波？

**[解]**　由式(5-206)，本例矩形波导的各阶波型的截止频率分别为

TE$_{10}$波：　　　$f_{c10}=3.00$ GHz；　TE$_{01}$波：$f_{c01}=3.75$ GHz；

TE$_{11}$和 TM$_{11}$波：$f_{c11}=4.80$ GHz；　TE$_{20}$波：$f_{c20}=6.00$ GHz；

TE$_{02}$波：　　　$f_{c02}=7.50$ GHz；…

由于 $f=5$ GHz 大于 $f_{c10}$、$f_{c01}$和 $f_{c11}$，所以，本矩形波导在 $f=5$ GHz下只能传输 TE$_{10}$波、TE$_{01}$波、TE$_{11}$波和 TM$_{11}$波。

如果在矩形波导两端再用两片理想导板将矩形波导封闭起来，就形成了所谓谐振腔。图 5-44 为矩形谐振腔示意图。在微波段，电磁波振荡都是由谐振腔实现的。谐振腔的型式很多，下面仅以矩形谐振腔为例，说明谐振腔的工作原理。显然，由于在矩形波导的传输方向上加了两片理想导板，因此，不论是 TE 波还是 TM 波在 $z$ 方向上均产生全反射并形成驻波，$z$ 方向的波数为

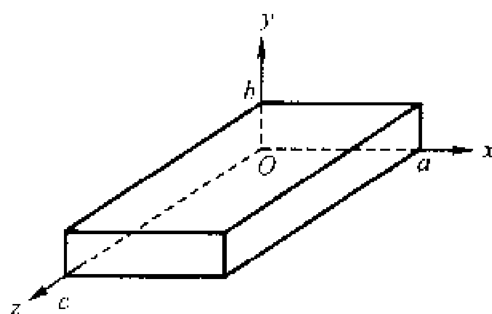


图 5-44　矩形谐振腔

$$k_z = \frac{l\pi}{c},\ l = 0,1,2,\cdots$$

其波型分别记为 TE$_{mnl}$和 TM$_{mnl}$。由波动方程得

$$-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\left(\frac{l\pi}{c}\right)^2+\omega^2\mu\varepsilon = 0$$

由上式，得谐振腔的谐振波长为

$$\lambda_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2+\left(\frac{l}{2c}\right)^2}} \tag{5-207}$$

谐振频率为

$$f_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2+\left(\frac{l}{2c}\right)^2} \tag{5-208}$$

**例 5-18**　一内部充满空气的矩形谐振腔，其尺寸为 $a=5$ cm，$b=4$ cm，$c=10$ cm。求该谐振腔最低阶波型谐振频率。

[解]　由式(5-208)，得

$$f_{mnl} = 3\times10^8\sqrt{\left(\frac{m}{2\times5\times10^{-2}}\right)^2+\left(\frac{n}{2\times4\times10^{-2}}\right)^2+\left(\frac{l}{2\times10\times10^{-2}}\right)^2}\ \text{Hz}$$

$$= 15\times10^9\sqrt{0.04m^2+0.0625n^2+0.01l^2}\ \text{Hz}$$

由于在矩形波导中不存在 TM$_{m0}$波型和 TM$_{0n}$波型，所以，在矩形谐振腔中也不存在 TM$_{m0l}$波型和 TM$_{0nl}$波型。这样，最低波型只能在 TE$_{10l}$波型和 TE$_{01l}$

波型中产生。当 $l=1$ 时，$f_{101}=3.34$ GHz，$f_{011}=4.04$ GHz。所以，该矩形谐振腔的最低阶波型为 $TE_{101}$ 波型（也称为矩形谐振腔的主模），其谐振频率为 3.34 GHz。

## 习　题

**5-1**　已知在某一理想电介质（参数为 $\gamma=0, \varepsilon=4\varepsilon_0, \mu=5\mu_0$）中的位移电流密度为 $2\cos(\omega t-5z)\boldsymbol{e}_x$ $\mu A/m^2$。求：

（1）该媒质中的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$；

（2）该媒质中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$。

**5-2**　设有一垂直放置的单元辐射子作为元天线，已知 $q_m=3\times10^{-7}$ C，$f=5$ MHz，$\Delta l=0.5$ m，分别求与地面成 40°角度，离单元辐射子中心为：(1)5 m及(2)5 km处的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的表达式。

**5-3**　设有一内阻为零的高频电源向某一单元辐射子天线供电，该天线的长度为 $\Delta l=5$ m，天线中的电流 $I=35$ A，电源的频率 $f=10^6$ Hz，求电源的电压及其输出的功率。

**5-4**　在无限大的真空媒质中，一均匀平面电磁波的电场分量为 $E_x=0$，$E_y=141\cos\left[2\pi\times10^8\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]$ V/m，$E_z=0$。求：

（1）此平面电磁波的磁场分量；

（2）此平面电磁波的传播方向、频率、相速度、波长和波数。

**5-5**　在远离辐射源的相距为 $r$ 的区域中，已知电磁波的电场为 $\boldsymbol{E}=\left(\frac{100}{r}\right)\sin\theta\cos(\omega t-2.09\times10^{-2}r)\boldsymbol{e}_\theta$ V/m。设该区域的 $\varepsilon=\varepsilon_0, \mu=\mu_0$。求：

（1）此电磁波的磁场；

（2）此电磁波的传播方向、波长和频率；

（3）每单位时间通过每单位面积的能量平均值。

**5-6**　设在真空中，有一沿铅垂线方向线性均匀极化且以频率 $f=10^8$Hz 随时间作正弦变化的 TEM 波，测得此 TEM 波的电场强度 $E$（有效值）$=0.1$ V/m。求：

（1）此 TEM 波的电场波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$；

（2）此 TEM 波的磁场波 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$；

（3）此 TEM 波的波长 $\lambda$、周期 $T$、相速 $v$、波数 $k$ 以及波的传播方向；

（4）每单位时间通过每单位面积的能量平均值。

**5-7**　已知自由空间中某一均匀平面波的电场强度 $\dot{\boldsymbol{E}}=(100\boldsymbol{e}_x+j100\boldsymbol{e}_y)e^{-j2\pi z/3}$，试决定该波的 $k$、$v$、$\omega$、$\lambda$、$\phi_x$、$\phi_y$、$\dot{\boldsymbol{H}}$ 的表达式及 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时表达式。

**5-8**　有一频率为 30 MHz 的均匀平面波在无损耗的介质中沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向传播。已知该介质的 $\varepsilon=20$ pF/m和 $\mu=5$ $\mu$H/m。$\boldsymbol{E}$ 只有 $\boldsymbol{e}_z$ 分量且初相为零。当 $t=6$ ns，$x=0.4$ m时，电场强度值为800 V/m，求 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时表达式。

**5-9** 在自由空间中，一正弦稳态均匀平面电磁波的波长为12 cm。当该电磁波进入一无损耗媒质后，其波长变为8 cm，且此时电场强度的幅值 $E_m = 50$ V/m，磁场强度的幅值 $H_m = 0.1$ A/m。求该平面电磁波的频率 $f$ 以及无损耗媒质的 $\mu_r$ 和 $\varepsilon_r$。

**5-10** 在导电媒质（参数为 $\mu_0$、$\varepsilon_0$ 和 $\gamma$）中有一沿 $z$ 轴方向传播的均匀平面波。

(1) 试决定单位体积中热功率损耗的瞬时值和平均值；

(2) 决定横截面为单位面积，长度为0—∞的体积中耗散的平均功率；

(3) 决定坡印廷矢量的平均值，并据此重求(2)；

(4) 试将(2)和(3)的结果相比较，以良导体为例说明两者是否相等。

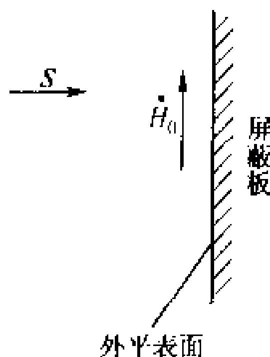
**5-11** 设有一均匀平面波在一良导体内传播，其传播速度为光在自由空间波速的0.1%且波长为0.3 mm。若该良导体的磁导率为 $\mu_0$，试决定该平面波的频率及良导体的电导率 $\gamma$。

**5-12** 某仪器正常工作的条件要求其所在处的外界磁场强度 $H<0.01$ A/m，为此必须采取电磁屏蔽措施，如题5-12图所示，若今实测到在无限大屏蔽板外平表面处工频的干扰电磁场的磁场强度值为 $H_0 = 10$ A/m。试按平面电磁波正入射到平表面的半无限大媒质的观点，求：

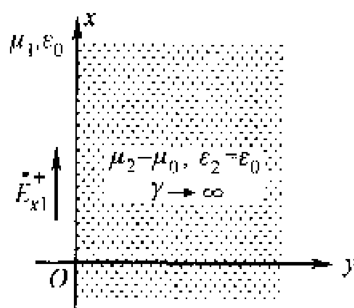
(1) 若采用铝板屏蔽，所需屏蔽板的厚度多大？（铝的电导率 $\gamma = 3.5\times10^7$ S/m，$\mu\approx\mu_0$）；

(2) 若采用铁板屏蔽，则所需屏蔽板的厚度又多大？（铁的电导率 $\gamma = 8.3\times10^6$ S/m，$\mu = 2\,000\mu_0$）；

(3) 若干扰电磁场为甚高频电磁场，则应采用哪种材料？




题5-12图




题5-13图

**5-13** 设空间有一沿 $x$ 轴取向的线性极化波，正入射于一完纯导体的表面，如题5-13图所示。已知 $\dot{E}_{x1}^{+} = 200e^{j10y}$ V/m。

(1) 求电场强度及磁场强度的反射分量和透射分量（相量形式）；

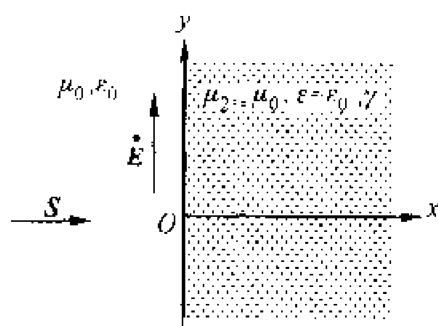
(2) 导体表面的面电流密度；

(3) 写出电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

**5-14** 已知一均匀平面电磁波 $\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_yE_{ym}\cos(\omega t - kx)$ 由空气正入射到一平表面的良导体（如题5-14图所示，该导体充满 $x>0$ 的半空间，其电导率 $\gamma = 5.8\times10^7$ S/m，磁导率 $\mu = \mu_0$）。求：

（1）该电磁波对于良导体的透入深度 $d$，并求在 $x=d$ 处电场强度值与 $x=0$ 处电场强度值的比值多大？

（2）若该良导体的电导率 $\gamma\to\infty$，则将呈现何种物理现象？求此时的透入深度 $d$ 及良导体表面（$x=0$）处电场强度和磁场强度值。




题 5－14 图

**5－15** 由远处辐射源激励产生的一正弦稳态均匀平面电磁波，在空气中某点现测得其坡印廷矢量的平均值 $S_{av}=e_y100\ \mathrm{mW/cm^2}$，频率 $f=10\ \mathrm{MHz}$。若设电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿 $z$ 轴正方向，试求：

（1）该正弦稳态（时谐）电磁波的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的瞬时表达式；

（2）如该平面电磁波垂直入射到一无限大的平表面的玻璃板上，且设玻璃表面位于 $xOz$ 坐标平面，玻璃板厚度看作为无限大，求反射电磁波的 $\boldsymbol{E}_r$ 和玻璃中透射电磁波的 $\boldsymbol{H}_t$（玻璃的 $\varepsilon_r=4,\mu_r=1$）。

**5－16** 一内部为空气的矩形金属波导（截面尺寸为 25 mm × 10 mm），当频率 $f=10^4$ MHz 的电磁波进入波导后，该波导可传输什么波型的电磁波？当波导中填充 $\varepsilon_r=4$ 的理想介质后，其传输的波型有无变化？

**5－17** 若内充空气的矩形波导尺寸为 $b<a<2b$，工作频率为 3 GHz。现如要求该工作频率至少高于主模 $TE_{10}$ 波的截止频率的 20％，且至少低于 $TE_{01}$ 波的截止频率的 20％。试求所设计波导尺寸 $a$ 和 $b$ 的取值范围。

# 第6章

# 工程电磁场应用专题

自1865年麦克斯韦奠定经典电磁理论以来，电磁场工程技术不仅在以电磁能量和信息的传输、转换过程为核心的强电与弱电领域中充分显示其重要作用，而且发展至今，在旁及军事、经济、生态、医疗、天文、地质等众多领域中，与多种技术相结合，生成了许多新技术。本章目的即在于部分展示和电磁场与波相关的学科、应用技术的前沿研究成果，或研究热点，或实用的工程技术。藉以表明工程电磁场学科的发展仍方兴未艾，其迎合当今工程科学技术发展总趋势的前景令人瞩目，从而寄望于学习本课程的学生能知难而上，激发学习兴趣，为日后工作、再学习奠定坚实而宽广的电磁理论与应用的学识基础。

## 6.1 电磁场数值分析

鉴于工程电磁场问题的复杂性，即各类电磁装置在其结构、几何形状上的复杂性，以及在材料性质变化上的复杂性，致使应用于电磁场计算的各种解析方法，例如分离变量法、镜像法等，已经无法适应广泛工程问题分析求解的需要。因而随着计算机技术的飞速发展，属于近似计算方法范畴的电磁场数值计算方法得到了长足的进展，并最终已可满足科技和工程方面对于数学模型精确分析的实际需要。

### 6.1.1 电磁场数值分析的任务和内容

电磁场数值计算的任务在于根据电磁场的基本特性，即基于麦克斯韦方程组，首先建立逼近实际工程电磁场问题的连续型的数学模型，然后采用相应的数值计算方法，经离散化处理，把连续型数学模型转化为等价的离散型数学模型——由离散数值构成的联立代数方程组（离散方程组），应用有效的代数方程组解法，计算出待求离散数学模型的离散解（数值解）。最后将通常所得电磁场的位函数离散解再经各种后处理过程，就可以求出场域中任意点处的场强，或任意

区域的能量、损耗分布,以及各类电磁参数值等,以达到对给定的工程电磁场问题进行理论分析、工程判断或优化设计等目的。综合电磁场数值计算处理的全过程,其流程框图如图6-1所示。

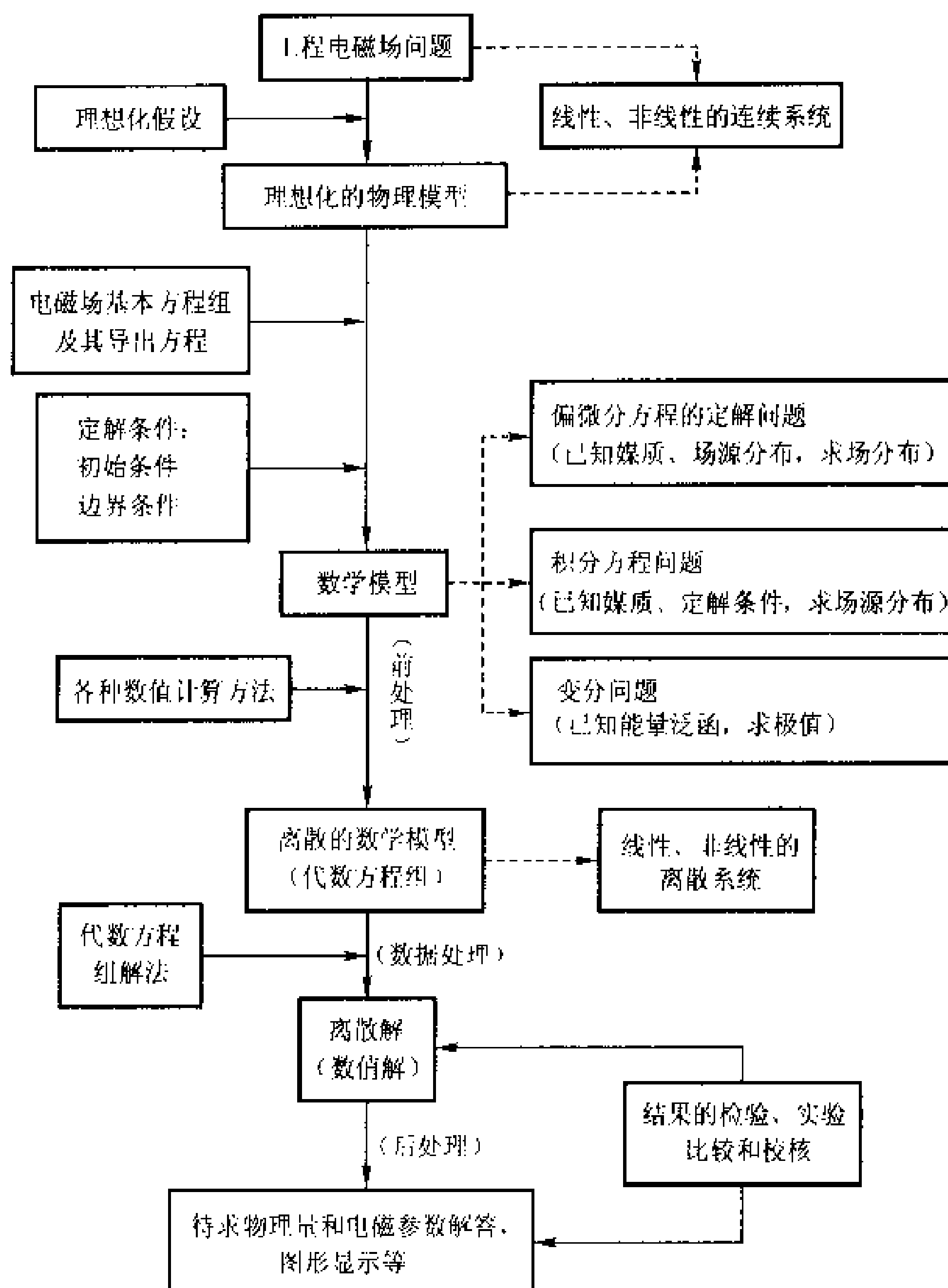



图6-1 电磁场数值计算流程图

就电磁场数值计算的核心内容——各种实用的数值计算方法而论,它们是将原连续型数学模型转化为等价的离散型数学模型的基础。取决于不同的数学内涵,目前在电磁场数值分析中常用的数值计算方法有:应用于微分方程型数学模型的有限元法、有限差分法和蒙特卡洛法;应用于积分方程型数学模型的模拟电荷法、矩量法和边界元法以及基于直接积分运算关系式的数值积分法等。此

外，各类数值计算方法的相互组合，例如微分和积分组合型数学模型的单标量磁位法、双标量磁位法等，进一步拓展了数值计算方法在工程实践中的应用。

应当指出，高速、大容量计算机的问世，为高精度、高效率的数值计算奠定了基础。经过20余年的发展，电磁场数值计算已经取得大量应用研究和工程分析、设计的成果，各种电磁场CAD商品化软件开始进入相关的研究部门、生产企业，产生日益明显的经济效益。与此同时，电磁场数值计算的理论和方法日趋完善，业已成为电工理论学科中的一门新兴的应用学科分支。

鉴于专题阐述的目的，下面仅限于概述常用数值计算方法中的有限元法、时域有限差分法和优化模拟电荷法的基本应用原理。

### 6.1.2 有限元法

近30多年来，以变分原理为基础建立起来的有限元法(Finite Element Method，简称FEM)已被普遍推广并成功地应用于诸如各类结构工程、热传导、渗流、流体力学、空气动力学、土壤力学、机械零件强度分析、电磁场工程问题等应用技术领域。

传统的有限元法以变分原理为基础，把所要求解的微分方程型数学模型——边值问题，首先转化为相应的变分问题，即泛函求极值问题；然后，利用剖分插值，将变分问题离散化为普通多元函数的极值问题，即最终归结为一组多元的代数方程组，解之即得待求边值问题的数值解。有限元法的核心在于剖分插值，它是将所研究的连续场分割为有限个单元，然后用比较简单的插值函数来表示每个单元的解，但是它并不要求每个单元的试探解都满足边界条件，而是在全部单元总体合成后再引入边界条件。这样，就有可能对于内部和边界上的单元采用同样的插值函数，使方法构造极大地得到简化。此外，由于变分原理的应用，使第二、三类及不同媒质分界面上的边界条件作为自然边界条件在总体合成时将隐含地得到满足，这就进一步简化了方法的构造。

值得指出的是，顺应工程领域各类物理问题日益发展的分析需要，有限元法的内涵也在不断延拓。例如，可应用加权余量法直接导出与任何微分方程型数学模型相关联的有限元方程；又如，为提高数值解的计算精度，延拓构成了等参元有限元法和$B$样条有限元法等；再如，把有限元法与其他数值方法相结合而构成的组合法，以及基于互补变分原理的互补、对偶有限元法的构造等进一步延拓了有限元法应用的领域。

总之，有限元法在众多的数值计算方法中已经确立其主导地位，并且无一例外地成为各种先进、实用计算软件包的构成基础。

现以二维场为例，设待求场量为$u(\boldsymbol{r})=u(x,y)$，概述一阶有限元法的基

本应用原理[18]如下：

(1) 等价变分问题的构造

设待求微分方程型的数学模型为

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{f(\boldsymbol{r})}{\beta} \quad (x,y) \in D & (6-1a) \\ u(\boldsymbol{r})\big|_{L_1} = u_0(\boldsymbol{r}_b) & (6-1b) \\ \dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\Big|_{L_2} = \dfrac{q(\boldsymbol{r}_b)}{\beta} & (6-1c) \\ u_1\big|_{L'} = u_2\big|_{L'} & (6-1d) \\ \beta_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{L'} = \beta_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{L'} & (6-1e) \end{cases}$$

其等价变分问题为

$$\begin{cases} J[u(\boldsymbol{r})] = \iint\limits_D \left\{ \dfrac{\beta}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - fu \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{L_2} qu\,\mathrm{d}l \\ \qquad = \min & (6-2a) \\ u(\boldsymbol{r})\big|_{L_1} = u_0(\boldsymbol{r}_b) & (6-2b) \end{cases}$$

(2) 剖分与插值

采用最常用的三角剖分(图 6-2)和相应的三顶点线性插值。设剖分得离散节点总量为 $n_0$，三角元总量为 $e_0$。定义三角元 $e$ 内的插值函数为

$$\begin{aligned} \bar{u}^e(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ &= \sum_{i,j,m} u_s N_s^e(x,y) = [N]_e \{u\}_e \end{aligned} \quad (6-3)$$

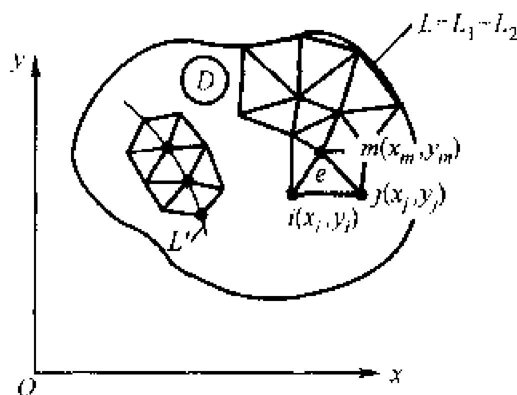


图 6-2 场域 $D$ 的三角剖分示意图

式中 $N_s^e(x,y)$ 称为三角元 $e$ 上的线性插值的基函数(亦称形状函数)，它取决于单元的形状及其相应节点的配置。

(3) 变分问题的离散化

首先，实施单元分析，得

$$\begin{aligned} J_e[u] \approx J_e[\bar{u}^e] &= \iint\limits_{D_e} \frac{\beta}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}^e}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}^e}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_e} f\bar{u}^e \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{L_2} q\bar{u}^e \mathrm{d}l \\ &= \frac{1}{2}\{u\}_e^{\mathrm{T}}[K]_e\{u\}_e - \{u\}_e^{\mathrm{T}}\{P_1\}_e - \{u\}_e^{\mathrm{T}}\{P_2\}_e \end{aligned}$$

(6-4)

其次进行总体合成，即在分别扩充各列向量和方阵的基础上，实施相应列向量和方阵求和的运算，导出

$$\begin{aligned} J[u] \approx J[\tilde{u}] &= \sum_{e=1}^{e_0} J_e[\tilde{u}^e] \\ &= \frac{1}{2}\{u\}^{\mathrm{T}}[K]\{u\} - \{u\}^{\mathrm{T}}\{P_1\} - \{u\}^{\mathrm{T}}\{P_2\} \\ &= J(u_1, u_2, \cdots, u_{n_0}) - \min \end{aligned} \tag{6-5}$$

(4) 有限元方程

根据函数极值理论，应有 $\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0(i=1,\cdots,n_0)$。从而得出

$$[K]\{u\} = \{P_1\} + \{P_2\} = \{P\} \tag{6-6}$$

上式再经强加边界条件(6－2b)处理后，最终构成对应于原边值问题[式(6－1a)—(6－1e)]的有限元方程

$$[K']\{u\} = \{P'\} \tag{6-7}$$

解上述方程即得待求场量 $u(\boldsymbol{r})$ 的离散解 $\{u\}$。

**例 6－1** 图 6－3 表示一种广泛用作各种操作机构执行元件的电磁铁——直流阀用电磁铁。为精确设计的需要，求其磁场分布。

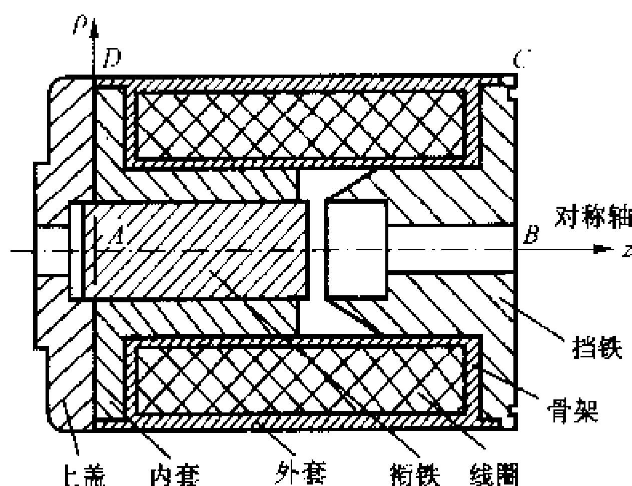
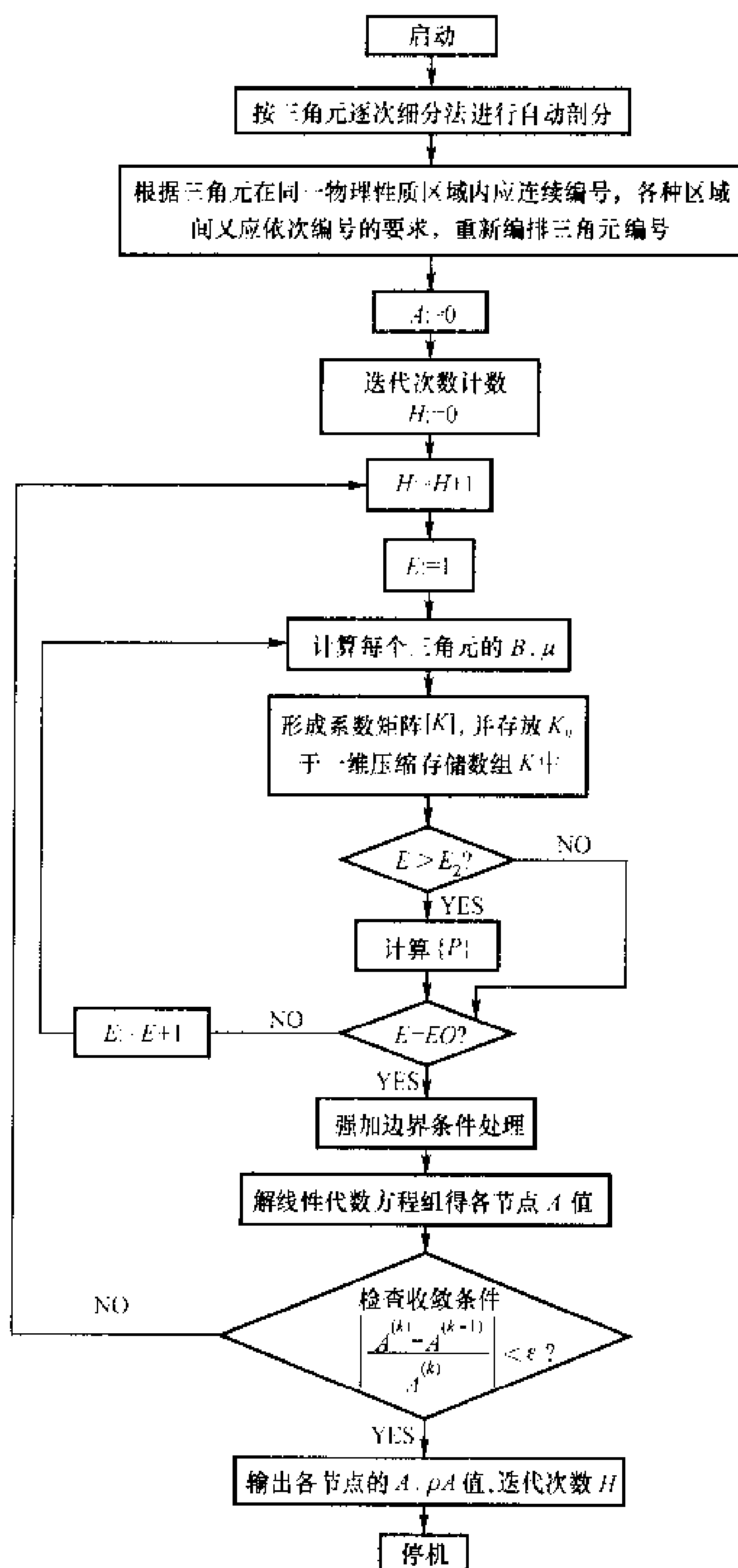



图 6－3 直流阀用电磁铁

**[解]** 本例为轴对称的非线性边值问题。以矢量磁位 $\boldsymbol{A} = A_\phi \boldsymbol{e}_\phi$ 为待求场函数，基于前述一阶有限元法的应用原理，可设计有限元计算流程框图，如图 6－4所示。解算后，当衔铁位于最大工作气隙时，该电磁铁内的 **B** 线分布如图 6－5所示。图中每根 **B** 线上标注的数值为相应的 $\rho A$ 值，而 $\rho A$ = 定值的轨迹即为 **B** 线。



启动
按三角元逐次细分法进行自动剖分
根据三角元在同一物理性质区域内应连续编号，各种区域
间又应依次编号的要求，重新编排三角元编号
$A:=0$
迭代次数计数
$H:=0$
$H:=H+1$
$E:=1$
计算每个三角元的 $B$、$\mu$
形成系数矩阵$[K]$，并存放 $K_{ij}$
于一维压缩存储数组 $K$ 中
$E>E_2$?
NO
YES
计算$\{P\}$
$E:=E+1$
NO
$E=E0$?
YES
强加边界条件处理
解线性代数方程组得各节点 $A$ 值
NO
检查收敛条件
$\left|\frac{A^{(k)}-A^{(k-1)}}{A^{(k)}}\right|<\varepsilon$ ?
YES
输出各节点的 $A$、$\rho A$ 值、迭代次数 $H$
停机


图6-4 计算流程框图

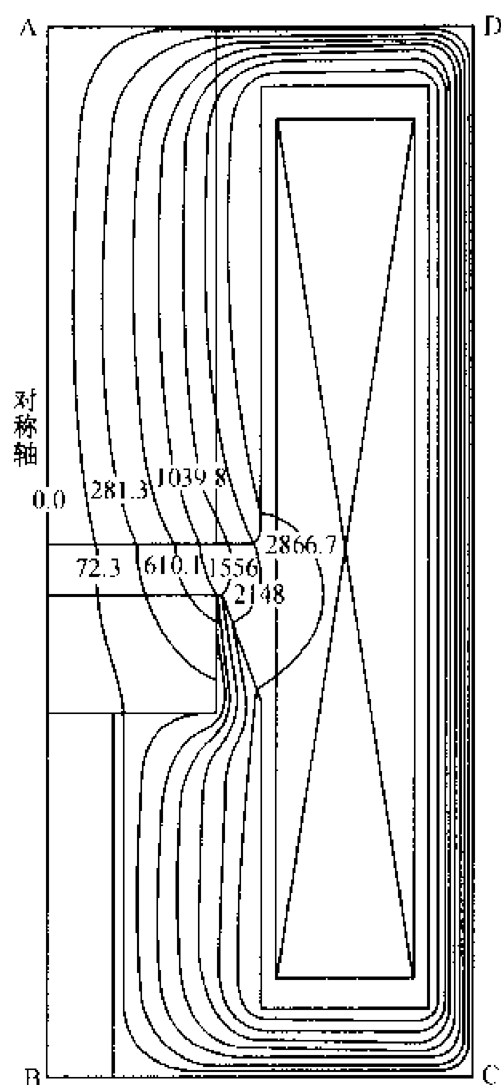



图6-5 *B*线分布图

### 6.1.3 时域有限差分法

当前,有限元法的广泛应用在极大程度上已取代了有限差分法。但是,值得注意的是,近代技术的发展,使复杂的高频电磁系统的分析与综合,以及高频电磁场与复杂目标相互作用的分析和计算成为重要的研究课题。这些研究课题以高频电磁场的传输、辐射、散射和透入问题为主线,反映了现代通信、雷达、物探、电磁防护、电磁兼容、医疗诊断、战略防御以及工农业生产和日常生活等领域多方面的需求。正是在众多分析任务与目标的推动下,时域有限差分法历经20余年的发展,以其直接的时域计算模式、广泛的适用性、较经济的存储空间和计算时间、程序的通用性与简明、直观等特点,从传统的有限差分法中脱颖而出,成为在上述一系列研究课题中广泛应用的数值计算方法。本节概述时域有限差分法

(Finite-Difference Time-Domain Method，简称 FDTD)的基本应用原理。

(1) Yee 氏网格

1966 年 Kane S. Yee 提出了后被称为 Yee 氏网格的空间离散方式(图 6-6)。这一合理的网格体系的特点是，电场和磁场各分量在空间的取值点被交义

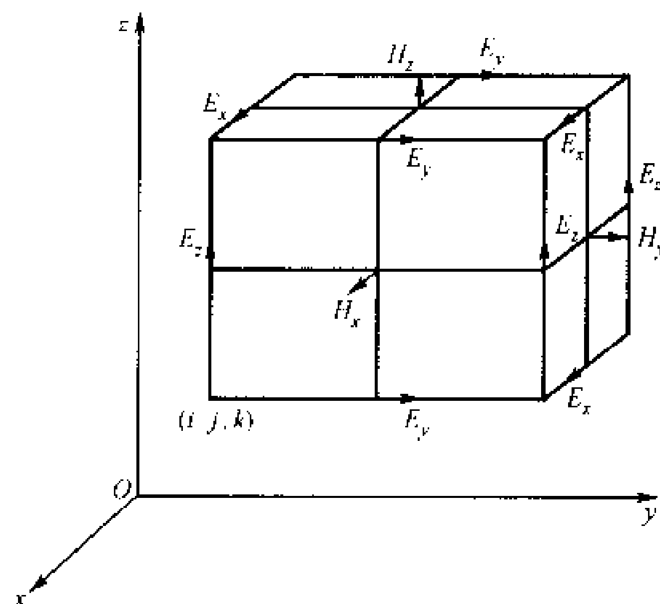



图 6-6　一个 Yee 氏网格单元及电磁场各分量在网格空间离散点上的相互关系

地放置，从而在每个坐标平面上每个电场分量的四周由磁场分量环绕，而每个磁场分量的四周则由电场分量环绕。这样的网格空间配置符合法拉第电磁感应定律和安培环路定律，亦即麦克斯韦方程组的基本要求，因而也就符合电磁波在空间传播的规律性。此外，它也满足不同介质分界面上场的切向分量连续的物理条件。显然，Yee 氏网格为在四维空间中合理地离散六个未知场量，建立具有高精度的差分计算格式奠定了理想的离散化空间的基础。

(2) 旋度方程的差分格式

1.4.3 节中已经指出，麦克斯韦方程组中两旋度方程是基本的，这是电磁场问题研究的出发点。

应指出，为保证 FDTD 计算稳定性，时间离散的步长与空间离散步长间应满足一定的关系。经分析表明，时间步长可选为电磁波传播一个空间步长所需时间的一半。

当场域由 Yee 氏网格离散后，空间步长分别为 $\Delta x$、$\Delta y$ 和 $\Delta z$；时间步长记为 $\Delta t$，以 $n$ 表示时间步长的“个数”，并标记于右上角，如场量 $F$ 的四维空间离散表示法为

$$F^n(i,j,k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$$

应用中心差商近似替代微商，不难导出两旋度方程的差分计算格式。对于无源、

均匀各向同性的线性介质中的第一旋度方程，电场分量的差分计算格式为

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)\right]-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left[H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{6-8}$$

同理，在$\left(n+\frac{1}{2}\right)$时间步，对$\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)$点的 $E_y$；在$\left(n+\frac{1}{2}\right)$时间步，对$\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)$点的 $E_z$，可得完全类似的差分格式。

对于相应的第二旋度方程中磁场分量的差分格式，由方程的对称性，可类比求得。应注意的是，因在 $E_x$、$E_y$ 和 $E_z$ 差分格式中磁场值取于$\left(n+\frac{1}{2}\right)$时间步，故下式中磁场取值均应取自$\left(n+\frac{1}{2}\right)$时间步或$\left(n-\frac{1}{2}\right)$时间步，以保证取值的时间步差为一个整时间步，从而保证下式中电场分量取值时间与前面的电场分量取值时间相同。这样，将为未知量的存储和计算带来很多方便。因此，对于第二旋度方程的磁场分量有

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left[E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right)-E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)\right]-\frac{1}{\mu}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left[E_z^n\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{6-9}$$

同理，在 $n$ 时间步，对$\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)$点的 $H_y$，在 $n$ 时间步，对$\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)$点的 $H_z$，可得完全类似的差分格式。

可以看出，任一网格点上的电场值只与它上一时间步的电场值及四周环绕它的磁场值相关；同样，任一网格点上的磁场值也只与它上一时间步的磁场值及四周环绕它的电场值相关。此外，媒质参数 $\varepsilon$、$\mu$ 均为空间坐标的函数，故 FDTD 易于处理非均匀和各向异性媒质的问题。

(3) 边界条件的差分格式

对于 FDTD，除与传统有限差分法对应的边界条件差分格式外，人们关心的研究点主要在于无界域问题以有界域逼近时，在人为设定边界上的所谓吸收边界条件(亦称辐射边界条件)问题。显然，为了用有限的网格空间来模拟电磁波

在无限大空间中的传播，在截断边界上应要求投射波不产生反射，就像被边界完全吸收一样。对此吸收边界条件的系统研究，通常是通过波动方程的因子分解而获得单向波方程，并由此而建立吸收边界条件。其中 Mur 吸收边界条件得到了较广泛的应用。

为说明吸收的概念和条件，这里仅讨论最简单的一维情况。不难验证。方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]F(x,t)=0 \tag{6-10}$$

的解可以表示为

$$F(x,t)=f(x+vt) \tag{6-11}$$

它表示一个沿 $x$ 负方向传播的波，故称为单向波，而方程(6-10)则可称为单向波方程。可以证明，如果一个垂直投射到一个平面边界上的平面波满足方程(6-10)，则它在边界上就不会产生反射。因此，单向波方程也就是一维吸收边界条件。

设一维网格点用 $i=0,1,2,\cdots$ 表示，网格步长为 $\Delta s$，时间步长为 $\Delta t$。现采用中心差商近似，可以导出左边界处($i=0$)一维吸收边界条件[式(6-10)]的差分计算格式为

$$F^{n+1}(0)=F^{n}(1)+\frac{v\Delta t-\Delta s}{v\Delta t+\Delta s}\left[F^{n+1}(1)-F^{n}(0)\right] \tag{6-12}$$

在满足计算稳定性条件下，若取 $\Delta s=2v\Delta t$，则上式还可进一步表示为非常简单的形式

$$F^{n+1}(0)=F^{n}(1)-\frac{1}{3}\left[F^{n+1}(1)-F^{n}(0)\right] \tag{6-13}$$

上式表明，任意步的边界场量值，可通过边界点及与其相邻的内点上相邻时间步的场量值计算得出。关于右边界吸收边界条件的差分格式可同理导出。

**例 6-2** 试分析飞机对电磁脉冲的响应。

核电磁脉冲严重威胁飞机的安全飞行和作战能力。为此，数值模拟成为一种必要的辅助分析研究手段。在 FDTD 应用的早期研究工作中即已有关于这一归属电磁散射问题的报导，其模拟对象为 F-111 战斗机，图 6-7 标出了原机轮廓与模型的关系。空间离散采用了长方体形网格，水平方向边长均为 1 m，垂直方向为 0.5 m；机翼和尾翼的有关部位则采用无限薄的二维网格。整个计算场域空间由 28×28×28 网格组成。在网格空间的截断处使用了吸收边界条件，以模拟无限大空间。

数值模拟中计及地面影响，为此设置地面的介电常数为 $\varepsilon_r=7$，且设置了三种不同的电导率，即 $\gamma=10^{-2}, 2\times10^{-2}, 5\times10^{-2}$ (S/m)。在飞机腹部一点上由入射脉冲引发的表面电流计算值与实测结果的比较示于图 6-8。由图可见，

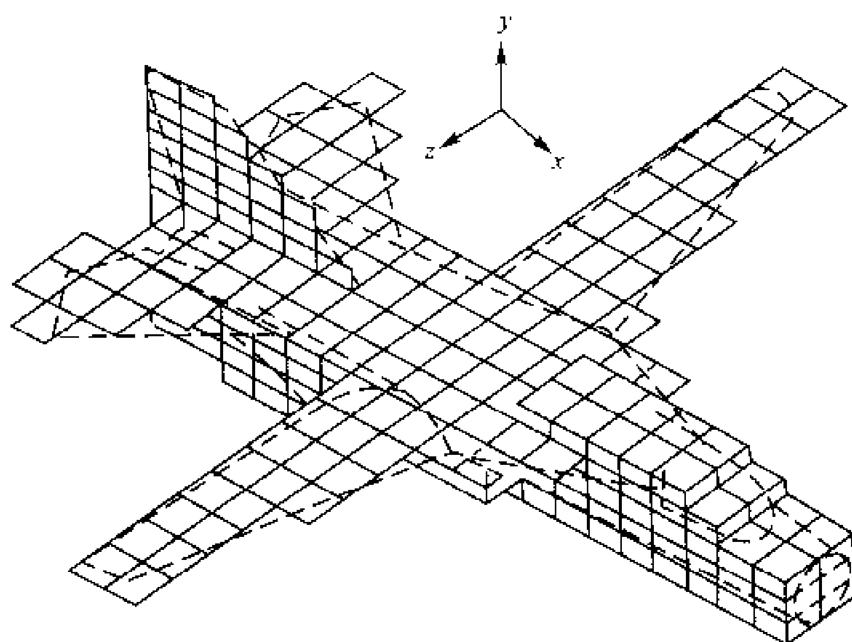



图 6－7　FDTD 网格空间中 F－111 飞机模型

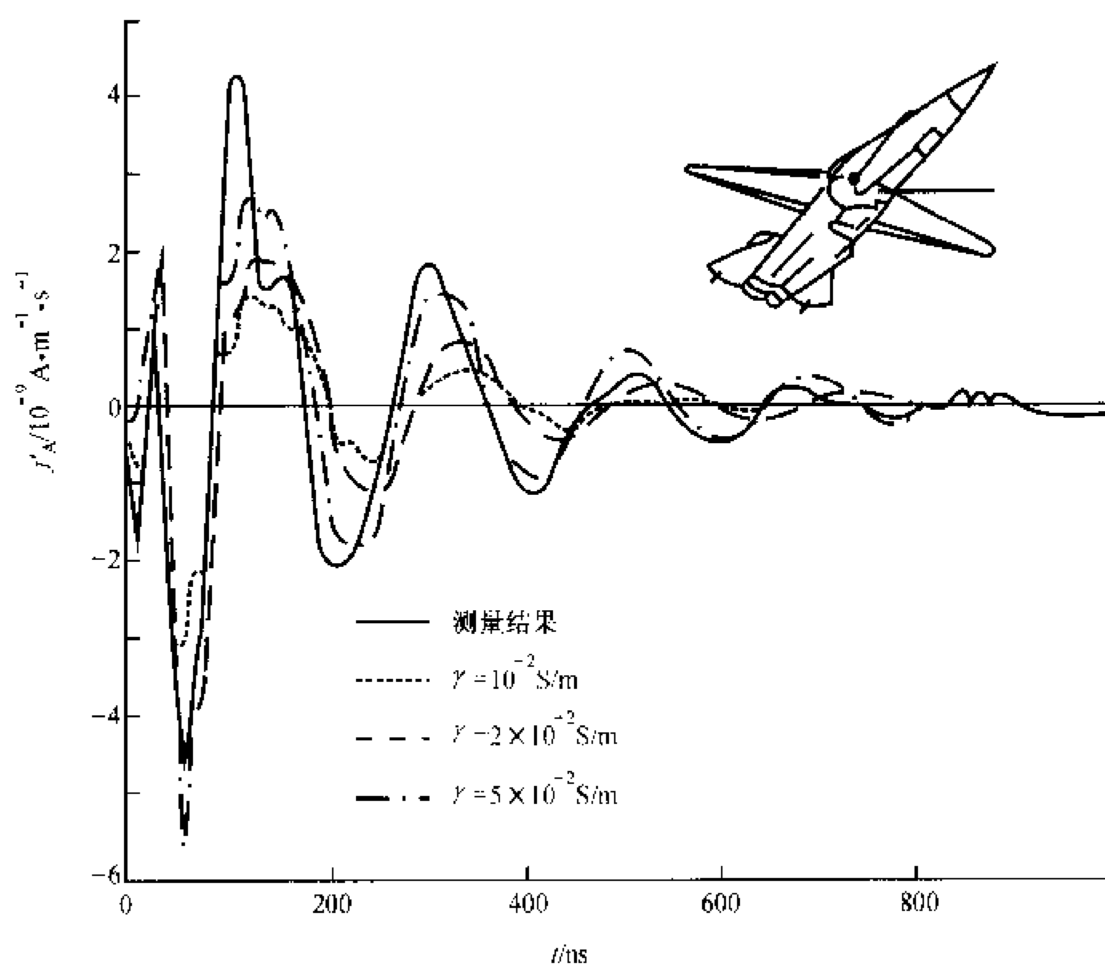



图 6－8　F－111 腹部一点上脉冲引发的电流计算值与实测结果的比较

$\gamma = 5\times10^{-2}$S/m时计算结果与实测值逼近度较好。

### 6.1.4 优化模拟电荷法

在1969年提出的模拟电荷法与高电压技术发展的需求相结合,是目前静电场数值计算的主要方法之一。模拟电荷法可看作广义的镜像法,其关键的应用技术在于合理地确定模拟电荷的类型、位置与数量,然后在设定匹配点的基础上,即能建立模拟电荷方程组$[P]\{Q\}=\{\varphi\}$,解出所设定的各模拟电荷值$\{Q\}$。实践表明,模拟电荷法简明、直观,能较有效地满足工程分析的需要。但是,在其上述关键技术应用上必然伴随的使用者的直接经验,不得不说是实现高精度数值分析的困惑。为此,近年来延拓发展的优化模拟电荷法显示了更为宽广的应用前景。

优化模拟电荷法是模拟电荷法与优化算法相结合的成果,方法通过为寻求模拟电荷最佳分布形态和量值而设定的目标函数,采用6.3节所述的优化算法,即能自动搜索到最佳的模拟电荷量值和位置,满足高精度电场数值分析的需要。

**例6-3** 球端圆棒-平板电极系统的电场。设圆棒形电极其端部为半径$R=1$的半球形,离接地平板高度为$G=5$,电位$\dot{\varphi}$(相对值)=1,如图6-9所示。

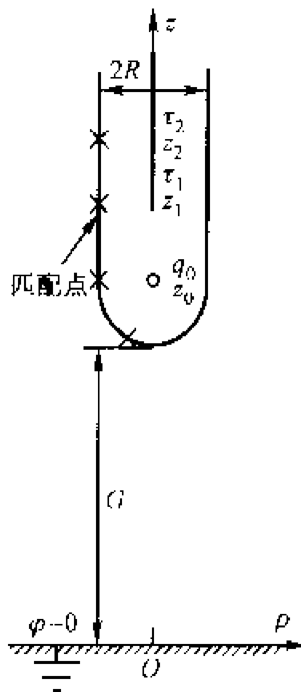


图6-9 球端圆棒-平板电极系统的优化模拟电荷法

［**解**］ 本例为轴对称边值问题。今选用一个点电荷$q_0$和两个半无限长的线电荷$\tau_1$、$\tau_2$来模拟棒形电极表面的电荷。设$q_0$在$z$轴上的坐标位置为$z_0$;$\tau_1$、$\tau_2$起始端点的坐标分别为$z_1$和$z_2$。采用优化模拟电荷法构造的优化问题为:

$$\min f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|\dot{\varphi} - \varphi_{ci}| \qquad (6-14)$$

$$\text{subject to } G < z_0 < G+2R$$

$$G < z_1$$

$$G < z_2$$

式中,优化变量$\{x\}$为6个;匹配点数$m=100$;$\varphi_{ci}$为模拟电荷在第$i$个匹配点的电位值的代数和。上述优化问题(6-14)的求解结合应用了禁忌算法(Tabu)[参见6.3.2节],优化解算结果得$f(x)=0.022$。按优化结果最终解出$[q_0,\tau_1,\tau_2,z_0,z_1,z_2]=[0.688,$

-0.218,0.359,5.889,8.932,7.604]。经验证,模拟结果极为理想。

## 6.2 电磁场逆问题

自第二章至第五章已经研究了各种电磁场正问题的分析、计算方法。这类正问题的共同点之一就在于给定了场的计算区域、各区域材料组成和(媒质)特性以及激励源的性质及其源量等。实际上,工程中经常遇到的则是电磁装置的综合问题,即电磁场的逆问题。顾名思义,电磁场逆问题就是给定电磁装置理想的性能指标或参数,然后通过装置的优化设计来实现这一目标。因此,电磁场逆问题是在电磁装置设计中早就受到关注的研究课题。目前,对于电磁场逆问题求解,都是把它们分解为一系列正问题,然后利用一定的优化方法进行迭代解算。由于在每一步迭代计算中,需要进行若干次电磁场数值计算和其他一些辅助计算,因此,相对正问题而言,逆问题的求解,计算量大、占用计算机内存和CPU时间多。也正因如此,只有随着计算机技术的发展,以及电磁场数值计算理论、方法的不断丰富和完善,才使电磁场逆问题从20世纪80年代中期以来成为应用研究的热点。目前,国内外有关电磁场逆问题的计算主要集中于二维稳态问题,且处于实验室开发阶段。一些世界著名电磁场计算软件包所提供的优化模块,也仅仅提供了(半)人为改变装置参数的接口条件。因此,充其量只能称之为多输入、多输出分析软件。但由于逆问题更接近于工程实际,而采用数值计算方法计算电磁场,能更加准确地计算出装置中电磁场的分布、电磁参数和性能指标,进而获得较准确的优化结果。因此,尽管这一问题的各个方面还很不成熟、理论基础还不十分坚实,但已引起了各国学者的普遍重视。始于1987年,历届电磁场计算(COMPUMAG)国际会议都将该内容列为今后电磁场数值计算的一个重要发展方向。在2000年CEFC国际会议上专门组织了由知名学者D. LOWTHER和O.A.MOHAMMED主持的电磁场逆问题和优化讲座。电磁场逆问题的研究前景举世瞩目。

如前所述,目前电磁场逆问题的求解计算都是把它们分解为一系列正问题,利用一定的优化方法进行迭代求解。因此,电磁场逆问题的研究主要围绕电磁场的数值计算和优化方法这两个主题,以及由此引起的一些相关问题而进行的。

### 6.2.1 优化算法

众所周知,几乎所有电磁场逆问题,都可以归结为多(冲突)目标函数的非线性规划问题;而每一目标函数又大多为多极值点的非凸规划问题。因此,传统的

确定类搜索算法,如各种梯度类法、模式搜索法、方向加速法等,很难找到这类问题的全局最优点。因而,人们一直在进行长期不懈的努力,探寻适合于电磁场逆问题求解的全局优化算法,出现了模拟退火算法、基因算法、进化算法、禁忌算法和神经网络等。从原理划分,这些算法都属于随机类算法。然而,与确定类算法相比,其致命弱点是收敛速度太慢。故如何改进这类算法以提高其收敛速度,是电磁场逆问题优化算法研究的主要方面。研究工作主要围绕两个方面进行:(1)对算法本身的参数,结构等进行改进。由此演化出如均场退火、自适应模拟退火、自学习模拟退火、各种改进的基因和进化算法等;(2)与确定类算法相结合。为充分利用确定类算法快速收敛的优点,可先利用随机类算法搜索到全区间最优解的吸引区,然后再应用确定类的优化算法进行搜索。因此,问题的关键是准确、可靠的转换判据研究。至今学者们提出了各种不同的改进或结合算法,但总体来说,算法的收敛速度仍难满足电磁场逆问题数值计算的需要。此外,由于这些算法都是为求解组合优化问题而提出的。因而,如何使之更好地适合连续变量函数的优化也是应用这类算法不得不面对的问题。

### 6.2.2 参数计算与模型接口问题

前已述及,为提高优化设计精度,必须采用数值计算方法计算电磁装置的性能和参数。然而,面对复杂的电磁装置,数值计算方法对计算资源的过高要求,常使数值方法的应用发生实质性的困难;另一方面,相关学科的技术进步、尤其是电力电子学科的发展,使得电磁装置日趋综合和集成化,进而导致数值方法难以模拟某些特定部件。因此,比较现实的研究方法就是抓住主要矛盾,对装置的主要部分采用数值计算方法,而对数值计算方法难以模拟的部分采用路的模型,或者应用经实践证实了的专用仿真软件。由此可见,电磁场逆问题需要研究的另一个主要方面就是如何应用场-路 合模型和相应算法来模拟复杂的电磁装置。这不仅涉及装置性能指标和参数(力、力矩、电感、电容等)等的计算问题,同时还涉及不同模型接口变量的选择及其计算、以及不同系统方程联立求解算法等。目前,场-路 合模型逐步发展,已可解决一些简单的机-电 合场等问题的求解。同时,一些著名的电磁场软件也已经把某些专用仿真软件,如 SPICE 介在其商用软件中。

### 6.2.3 其他相关问题

尽管数值计算方法,如有限元方法,已经成功地解决了许多实际工程问题,但若应用于电磁场逆问题并达到工程实用化,还有许多工作要做。其中相关问

题之一就是如何应用数值法快速有效地计算电磁装置的性能指标和参数。因为逆问题求解通常至少要迭代几百次，而每次迭代又至少需要一次电磁场的数值计算，甚至于对某些复杂问题来说，需要几百次的数值计算。所以，在有限元分析中有些不成为“问题”的问题，而在逆问题计算中就有可能变成不可逾越的障碍。如变频调速系统谐波力矩优化问题中，对系统的稳态电磁转矩的计算，既不能采用复变量的有限元法（非线性），又不能采用时步有限元法（至少需计算几十个周期才能到达稳态）。为此，人们提出了诸如灵敏度分析和泰勒级数结合法、有限元－状态空间结合法和时间步进有限元－复有限元结合算法。逆问题求解遇到的另一个相关问题则是几何形状优化中由于几何参数变化引起的剖分网格畸变问题。为解决这一问题，必须采用自适应剖分技术。这对计算机资源需求来说无疑是雪上加霜，更不用说不连续剖分网格引起的离散误差问题。更有甚者，这些离散误差有时会给出错误的灵敏度信息，进而导致优化失败。值得指出的是，近年来在计算力学中提出的无网格方法，似应是解决这一问题的理想工具。因为这类方法的形状函数是在求解域内一系列节点上建立的，而不是在单元基础上建立的。因而也就不存在重新剖分问题。换句话说，对应于几何形状的变化，只需给出新的边界信息即可满足求解要求。

### 6.2.4 计算实例

旋转电机是应用极为广泛的一种电磁装置。近年来，电机技术新进展的标志之一在于其能量密度的不断提高。因而如牵引电机单位体积的功率密度增加，将导致转子 的过度磁饱和。这一方面引起转子 发热增加；另一方面导致气隙磁场谐波含量增大，基波分量减少。因此，需在转子 部沿轴向增加通风道，如图 6－10 所示圆形区。然而，增加通风道的负面效应之一是由于有效导磁面积的减少将可能加剧磁饱和效应，从而，需要对通风道进行优化设计。这里，以某一 300 kW，四极，1 430 V，200 Hz 牵引电机转子通风道优化设计作为电磁场逆问题的计算实例。首先，用传统的分析设计方法完成初始风道的设计，如图 6－10所示，相应的磁场线分布见图 6－11。在此基础上，应用电磁场逆问题的数值计算技术对通风道的形状和参数予以优化，以求在保证基波磁密不变的条件下，通风道的面积最大。该问题可表述为：

$$\left.\begin{aligned}&\max && S_{total}\\&\text{subject to} && B_{fun}=\text{const}\end{aligned}\right\}\qquad(6-15)$$

式中，$S_{total}$为通风道的总面积，$B_{fun}$为气隙磁密的基波分量。

优化（设计）变量如图 6－12 所示。此外，优化变量还要满足其他的约束条

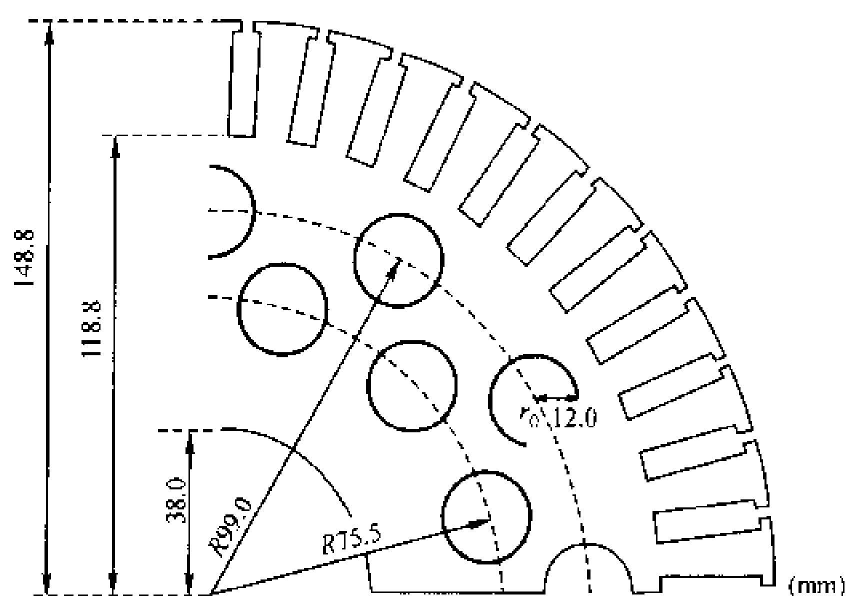



图 6-10　传统设计方法设计的转子通风道(初始结构)

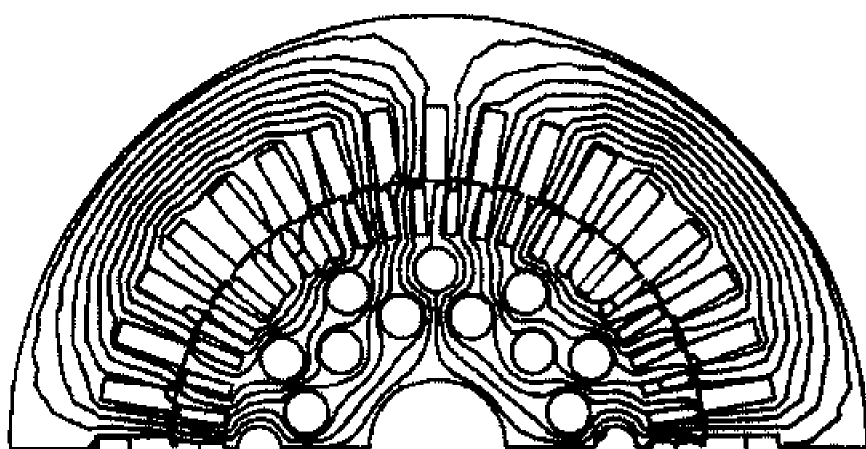


图 6-11　初始结构下的磁场线分布

件如几何约束条件等,为突出主题,在此不作展述。该电机电磁场和性能指标的计算,采用边界元-有限元相组合的方法,即在铁磁材料非线性区采用有限元模型,而在气隙区则采用边界元方法。优化方法采用模拟退火算法。表 6-1 给出了经 3 497 次迭代(20 177 min)后得到的该问题的最优结果。优化结构下磁场线和气隙磁场的波形分布分别示于图 6-13 和图 6-14。由这些结果不难看出,在保证气隙磁密基波分量不变的条件下,优化后转子通风道的有效面积增加了 12%左右。因此,经过电磁场逆问题的求解计算,不仅增加了转子通风道的有效散热面积,同时还减轻了电机的重量,降低了电机的成本(减少了转子　消耗的铁磁材料),进而增加了产品的竞争力,其效果是十分明显的。

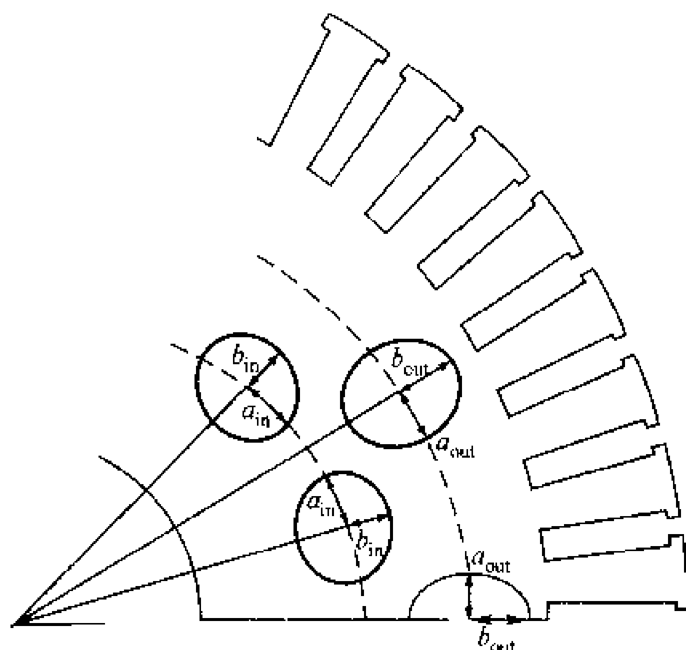



图 6-12 优化(设计)变量图

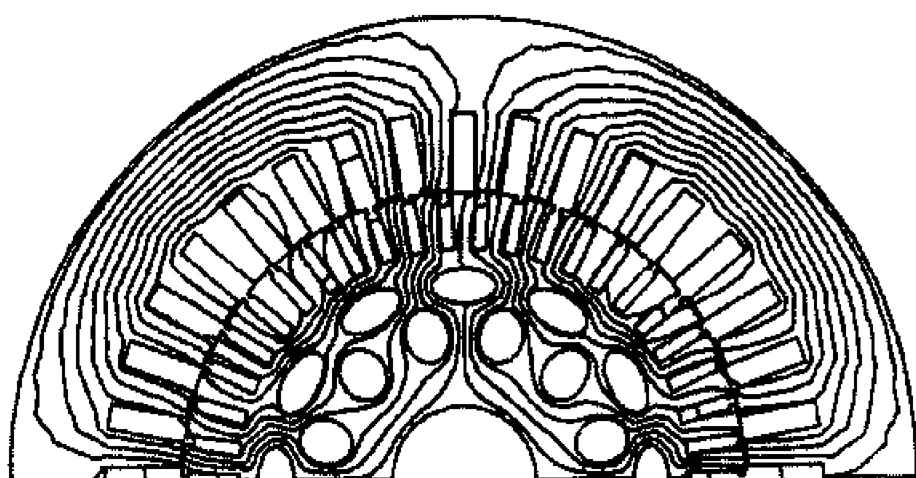


图 6-13 优化结构下的磁场线分布

**表 6-1 优化结果和性能比较**

| 方 案 | 优 化 变 量(mm) | | | | $S_{total}(mm^2)$ | $B_{fun}(T)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_{in}$ | $b_{in}$ | $a_{out}$ | $b_{out}$ | | |
| 初始方案 | 12.00 | 12.00 | 12.00 | 12.00 | 10 857.34 | 0.71 |
| 优化方案 | 11.579 | 13.897 | 17.356 | 9.271 | 12 132.02 | 0.71 |

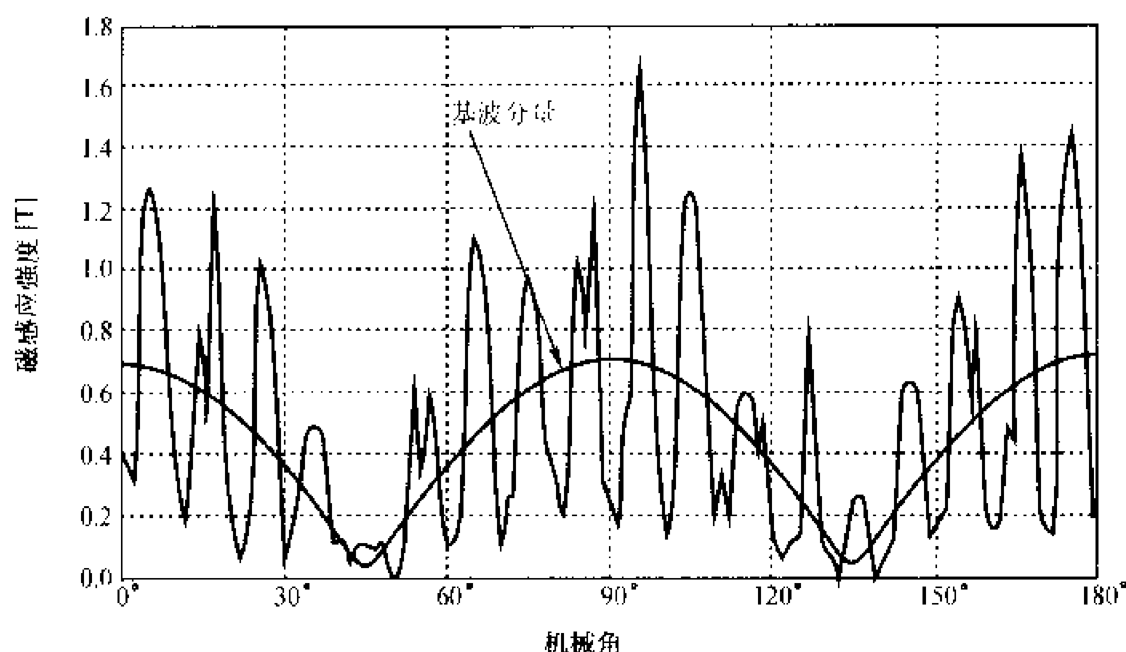



图 6-14　优化结构下的气隙磁密分布曲线

## 6.3　优化算法及其在电磁场逆问题中的应用

前已述及，电气工程中所有优化问题（包括电磁场逆问题）几乎都可归结为多（冲突）目标函数的非线性规划问题；而每一目标函数又大多为多极值点的非凸函数。因此，全局优化算法的研究在现代优化设计中居主导地位。由于各种确定类的优化算法都不能有效地搜索到全局最优解。同时，从理论上讲，只要满足一定的条件，随机算法均能找到全局最优点。因而人们转而探索各种新的随机类优化算法，如模拟退火算法、基因算法、进化算法和禁忌算法等。与确定类算法相比，这类算法的突出优点是算法具有"上山"性，因而算法能够跳出局部极值点而搜索到全局最优解；与传统的随机类优化算法相比，这些算法的"上山"性具有目的性，从而可以较少的计算代价取得满意的计算结果。但是尽管如此，这类新算法的收敛速度与工程实际的要求之间仍有较大差距。因此人们努力的方向之一是如何有效地提高这些算法的收敛速度。本专题目的在于介绍有关这些算法的入门知识，即算法的基本原理，关于进一步改进这些算法的研究成果，读者可参考有关文献。

### 6.3.1　模拟退火算法（Simulated Annealing Algorithm）（SA）

SA 算法的思想最早由 N. Metropolis 等人提出，但把它发展成为一种优化算

法，并应用于组合优化问题，则要归功于 S. Kirkpatrick 等人。模拟退火算法是一种随机的搜索方法。它的基本原理是：设极小化优化问题中目标函数第 $k$ 和 $(k+1)$ 次的计算值分别为 $f_k$ 和 $f_{k+1}$，如果 $f_{k+1}<f_k$，则新点 $x_{k+1}$ 被接受，算法从 $x_{k+1}$ 开始进行下一次迭代，直到满足给定的收敛判据；如果 $f_{k+1}\geqslant f_k$，则作随机处理，新点的接受与否由 $\exp\left(-\frac{f_{k+1}-f_k}{T}\right)>r$（其中 $r$ 为(0,1)上均匀分布的随机数，$T$ 为控制参数）决定，若条件成立，$x_{k+1}$ 也被接受；反之则被放弃。该算法的基本迭代过程见图 6－15。

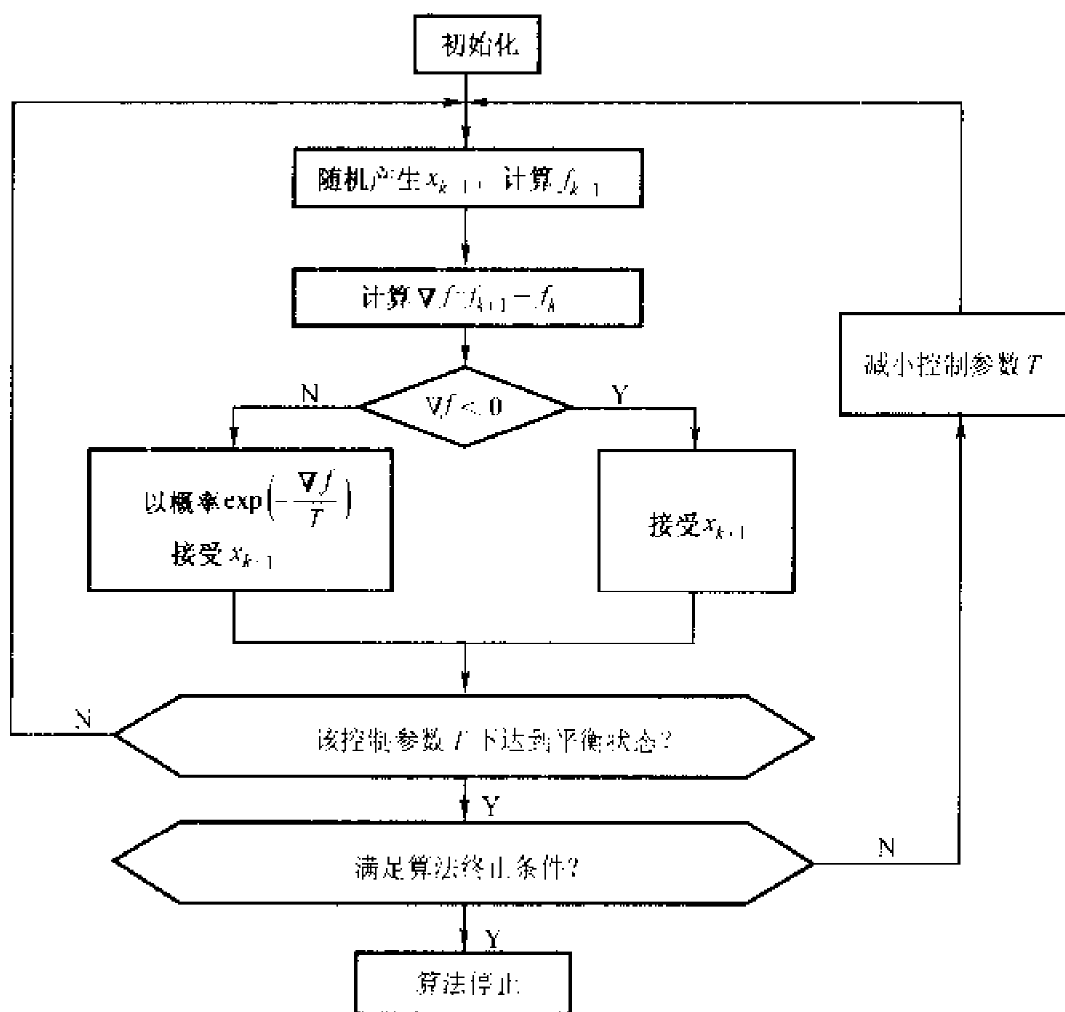



图 6－15 SA 算法的基本原理与计算流程

SA 算法主要由二重循环组成：(1) 固定控制参数下寻找平衡状态的循环；(2) 改变控制参数寻找全局最优解的循环。判断在某一控制参数下达到平衡状态的普遍做法是给定迭代次数；而判断算法是否已搜索到了全局最优点，其常用方法有：(1) 控制参数已经非常小；(2) 迭代到一定次数；(3) 连续给定次搜索到的最优函数值不再变化；(4) 更复杂的判据。

由以上分析和图 6-15 可见，SA 算法具有全局寻优能力的关键是在迭代过程中可以取坏值（具有"上山"性），即跳出局部极值点，同时，取坏值概率 $\left[\exp\left(-\frac{f_{k+1}-f_k}{T}\right)>r\right]$ 的大小受参数 $T$ 的控制。SA 算法正是通过调节控制参数 $T$（即开始搜索时，$T$ 选得足够大，使得算法在整个可行域内均匀地搜索，然后逐渐减小控制参数 $T$，使算法接受坏值的概率逐渐减少，直至接近全局最优点附近时减小到 0，实现以较少计算代价搜索到接近全区间最优解的目标。此外，所选取的新值在统计上满足一定的概率(Boltzmann)分布。这样，从理论上保证了算法的全局收敛性。同时，进一步的分析研究表明：对于连续变量的目标函数，只要满足连续、有界，SA 算法终将收敛于接近全局最优解集。这就为 SA 算法推广应用于众多工程领域提供了理论依据。

### 6.3.2 禁忌算法(Tabu Search Algorithm)(TS)

禁忌算法也是一种启发式的随机搜索算法，是 F. Glover 等为求解组合优化问题而提出的，目前已得到广泛应用。但该算法在连续变量函数优化问题中的应用，远没有它在组合优化方面应用得那么广泛和深入。设极小化问题为：$\min f(x)$，$R^n \rightarrow R$。TS 算法可简述如下：从任一初始状态 $x$ 开始，算法从当前状态 $x$ 的邻域 $N(x)$ 中随机产生一系列新点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p$；取所有新点中"最好"的点 $x^*$（$f(x^*)=\min[f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_p)]$）为新的当前状态点，即令 $x = x^*$，继续迭代；这个过程一直持续下去，直到满足一定的终止条件为止。

由上述算法可知，Tabu 算法新点的选择也具有"上山"性，即从点 $x$ 转移到新点 $x^*$ 时并不要求 $f(x^*)<f(x)$，仅要求 $f(x^*)$ 为随机产生的 $p$ 个新点中"最好"的一个。因而算法具有跳出局部极值点而收敛到全局最优点的能力。此外，由上述算法的基本结构可以看出，Tabu 算法在迭代过程中有可能陷入死循环，即从某一点 $x_k^*$ 开始，经过一定的中间状态又回到 $x_k^*$，亦即 $x_k^* \rightarrow x_{k+1}^* \rightarrow \cdots \rightarrow x_{k+l}^* \rightarrow x_k^*$。为避免这种现象的发生，对于组合优化问题，可设置一 Tabu 表，把在当前不能转入的点，如上述的 $x_k^*$，存入该表中。这也正是 Tabu 算法名称的由来。在实际计算中，Tabu 表的长度是有限的，在优化过程中表中的点不断进行调整，调整的原则是先进先出。因此，某一点在表中只保留一定的时间。这样，既有效地避免了迭代过程中可能出现的死循环，又保证了算法足够均匀地搜索整个可行空间。值得指出的是，对于连续变量目标函数的优化问题，Tabu 表的设置有可能导致算法陷于局部极值点，所以下面介绍的连续变量 Tabu 算法

没有设置 Tabu 表。

根据组合优化 Tabu 算法并参考相关领域的工作，我们提出了如下的连续变量目标函数优化的 Tabu 算法。

STEP 1　给定目标函数 $f(x)$ 及其可行域 $D=\{x \mid a \leqslant x_i \leqslant b(i=1,2,\cdots,N)\}$，定义步长向量 $H=\{h_i: h_i=\frac{h_{i-1}}{c}(i=2,3,\cdots,r; h_1=1; c=1\,000^{\frac{1}{r-1}})\}$，任选初始状态 $x$；

STEP 2　在 $x$ 的每一邻域 $N(x,h_i)=\{y: \| y-x \| \leqslant h_i\}(h_i \in H)$ 都随机产生一新点。取其中的"最好"点 $x^*$ 为新的当前点，即令 $x=x^*$；

STEP 3　比较 $f(x^*)$ 和当前已经搜索到的最佳目标函数值 $f_{opt}$。如果该点好于最优点，则以该点作为新的最优点；

STEP 4　终止条件判定。如果条件满足，则算法终止；否则转 STEP 2 继续搜索。

很明显，Tabu 算法仅有一重循环。因此，从迭代次数上讲，它优于模拟退火算法。一般情况下，连续搜索给定次数而搜索到的最优函数值不再改进时，算法即终止迭代过程。

### 6.3.3　基因（遗传）算法（Genetic Algorithm）（GA）

基因算法是一种基于自然选择原理和自然遗传机制的随机搜索（寻优）方法。它模拟自然界中的生命进化机制，在人工系统中实现特定目标的优化。该算法由 N 个随机产生的种群开始，通过繁殖、交叉和变异等操作，种群一代一代向好的方面进化，直到满足一定的终止条件为止。其基本迭代过程为：

STEP 1　初始化。随机产生初始种群 $P(t)$，并计算初始种群的适值和目标函数；

STEP 2　由初始种群 $P(t)$，通过繁殖、交叉和变异，产生新的种群 $P(t+1)$；

STEP 3　终止条件判定。如果条件满足，则算法终止，否则令 $P(t)=P(t+1)$，然后转 STEP 2，继续寻优。

一般的遗传算法都包含三个基本算子：(1) 繁殖（Reproduction Operator）、(2) 交叉（Crossover Operator）、和 (3) 变异（Mutation Operator）。现通过一个简单算例说明 GA 算法的基本工作原理。

**例 6－4**　求函数 $f(x)=e^{-x}\sin^2(x)$ 在区间 [0,6.28] 上取最大值的点 $x_0$（自变量 $x$ 的单位为弧度）。

**[解]**　(1) 在区间 [0,6.28] 上的整数用一个 10 位二进制位串进行编码，$x$ 的值对应二进制位串的值的百分之一。

(2) 用随机法，即对某位串的某一位，计算机在(0,1)区间内产生一随机数，若该随机数大于或等于0.5，则该位为1，反之为0。这样，共生成一个由4个位串组成的初始种群，由4个位串组成的初始种群，如表6－2所示。

(3) 计算适值及选择率

① 解码各位串得相应参数 $x$ 的值；

② 由参数值计算目标函数值 $f(x)=e^{-x}\sin^2(x)$；

③ 由目标函数值得相应位串的适值(在本问题中为直接求取函数值)，并计算适值比例图。计算原则是在单位长度的区间上，某位串占有的区间长度与该位串的适值成正比(图6－16)。




图6－16　适值比例图

计算选择率 $P^i_{select}=f_i/\sum f_i$ 及期望值 $f_i/\bar{f}$，详见表6－2。

**表6－2　初始种群、适值及选择率计算表**

| 编　号 | 初始种群位串 | 参数值 | 目标函数(适)值 | 选择率 $P^i_{select}$ | 期望值 $f_i/\bar{f}$ | 实选值 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0110010101 | 4.05 | 0.011 | 0.020 | 0.08 | 0 |
| 2 | 0000110010 | 0.50 | 0.139 | 0.245 | 1 | 1 |
| 3 | 0010000111 | 1.35 | 0.247 | 0.444 | 1.77 | 2 |
| 4 | 0010110001 | 1.79 | 0.159 | 0.286 | 1.14 | 1 |
| 总和 Σ | | | 0.556 | 1.00 | 4.00 | |
| 平均值 $\bar{f}$ | | | 0.139 | 0.25 | 1.00 | |
| 最大值 | | | 0.247 | 0.44 | 1.76 | |

(4) 繁殖。在区间[0,1]内均匀地产生4个随机数，其结果为：0.13,0.42,0.58,0.8，因为适值大的变量在适值图中所占区间长度大，故被选中的机会就多。根据图6－16，3号被选中两次，2号、4号各一次，如表6－2所示，置于交配池中，如表6－3所示。

(5) 交叉

① 随机选择交配对象，结果串1和串2配对，串3和串4配对；

② 随机选择交叉点，结果第一对在位置7交叉，第二对在位置5交叉；结果如表6－3所示；

(6) 变异,取变异概率 $P_m = 0.001$,这样,平均在 1 000 位中才有一位变异(从 0 到 1 或从 1 到 0),而由 4 个位串组成的种群中共有 $4\times10=40$ 位,即变异的期望值为 $40\times0.001=0.04$ 位。事实上在这个单代遗传实验中没有发生变异。

**表 6-3　优化问题的交叉操作**

| 选择后的交配池(竖线为交叉位置) | 交叉对象(随机) | 交叉位置(随机) | 新的种群 | 参数值($x$) | 目标函数 $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0000110\|010 | 2 | 7 | 0000110111 | 0.55 | 0.158 |
| 0010000\|111 | 1 | 7 | 0010000010 | 1.30 | 0.253 |
| 00100\|00111 | 4 | 5 | 0010010001 | 1.47 | 0.228 |
| 00101\|10001 | 3 | 5 | 0010100111 | 1.67 | 0.186 |
| 总和 $\sum$ | | | | | 0.825 |
| 平均值 $\bar{f}$ | | | | | 0.206 |
| 最大值 | | | | | 0.253 |

由表 6-2 与表 6-3 的对比可以看出,虽然仅经历了一代进化,第二代的平均值和最大值比第一代有了较大提高(均值从 0.139→0.206,最大值由 0.247→0.253),这说明种群正朝优化的方向发展。

由此可见,GA 算法的最大特点是优化过程中从一个种群向另一种群过渡,在过渡过程中,上一代种群的优良特性遗传给下一代种群,且有最大适值的个体获得选择的机会较多,即目标函数值比较好的变量被选中作为父代产生下一迭代新变量的机会较多。因此,GA 算法能充分利用已搜索过的状态空间和目标函数的信息,指导下一次迭代新状态点的选取。此外,与传统方法相比,它的主要优点是:(1) 使用参数的编码集,而不是参数本身进行运作;(2) GA 是在点群中,而不是在一个单点上寻优;(3) GA 使用问题本身的目标函数进行运作,而不需要其他任何先决条件;(4) GA 使用随机转移机制(规则)而不是确定性规则。

### 6.3.4　计 算 实 例

现以如下复杂函数的给定优化结果为基准,来检验前述方法求解连续变量目标函数的全局寻优能力。

**例 6-5**　函数 1　　$\min f(x) = -\left\{\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\sin\left[2\pi\left(x_i+\frac{i}{5}\right)\right]\right\}^2$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,6)$$

该函数的2个全局最优点为(0.05,0.85,0.65,0.45,0.25,0.05)和(0.55,0.35,0.15,0.95,0.75,0.55),对应的目标函数值为-1。而局部极值点数为无穷个。

**例6-6** 函数2

$$\min f(x) = k_3\{\sin^2(\pi k_4 x_1) + \sum_{1}^{n-1}(x_i - k_5)^2[1 + k_6\sin^2(\pi k_4 x_{i+1})] +$$

$$(x_n - k_5)^2[1 + k_6\sin^2(\pi k_7 x_n)]\}$$

式中,$k_3 = 0.1, k_4 = 3, k_5 = 1, k_6 = 1, k_7 = 2$,  $x = \{x \in R^5 \mid -5 \leqslant x_i \leqslant 5, i = 1,2,\cdots,5\}$。

该函数有 $15^5$ 局部极值点。其全局最优点为 $\{x_{\rm opt}\} = (1,1,1,1,1)^{\rm T}$,且 $f_{\rm opt} = 0$。

SA和TS算法对函数1进行寻优计算的优化结果如表6-4所示,相应的搜索轨迹分别示于图6-17和图6-18。GA算法对函数2的优化结果如表6-5所示(种群规模为90)。由此可见,所述的几种新随机类优化算法均能搜索到复杂函数的全局最优点,但与确定类优化算法相比,其迭代次数要多得多。

表6-4 不同算法所得函数1的优化结果

| 算法 | 最优点 | 最优值 | 迭代次数 |
|---|---|---|---|
| TS | (0.550 017 0,0.350 057 4,0.150 049 0,0.950 002 3,0.750 015 7,0.549 976 0) | -1.000 000 0 | 1 260 |
| SA | (0.550 083 2,0.350 304 8,0.149 712 5,0.950 194 2,0.750 102 1,0.550 239 0) | -0.999 998 1 | 328 669 |

表6-5 GA优化函数2的计算结果

| $x_{\rm opt}$ | $f_{\rm opt}$ | 迭代次数 |
|---|---|---|
| (0.999 933,0.979 000,1.016 089,0.994 936,1.000 238) | 0.000 078 8 | 171×90 |

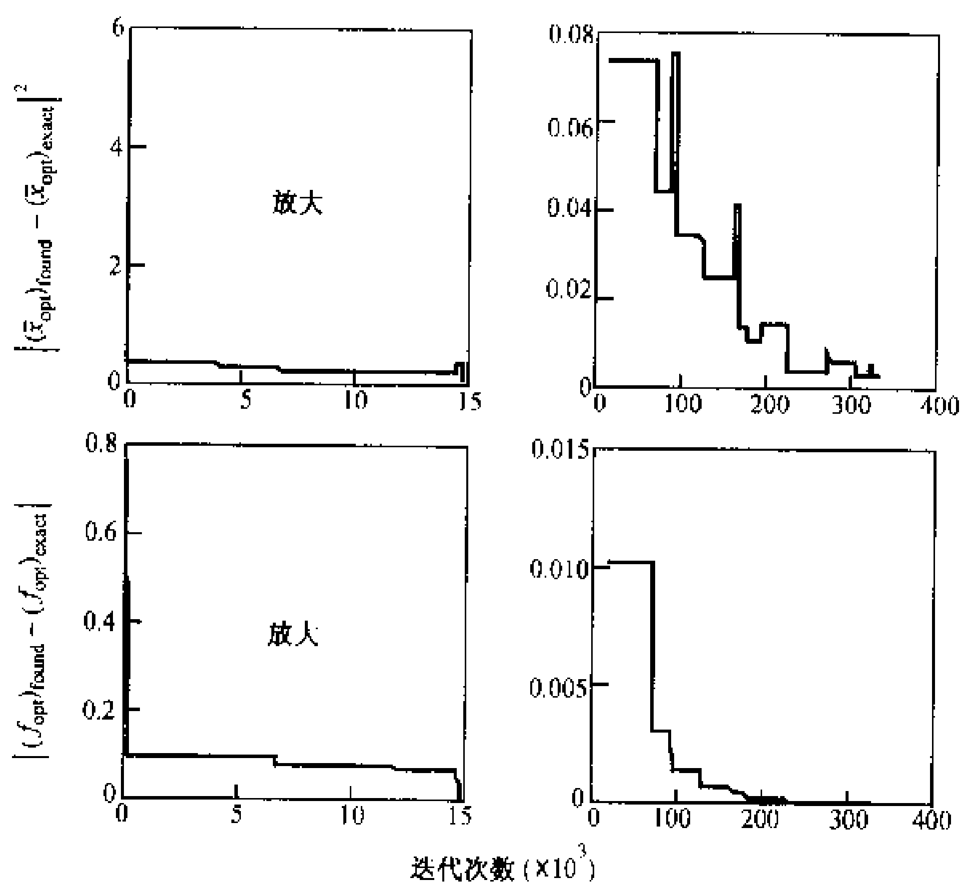



图 6－17　SA 算法的搜索轨迹

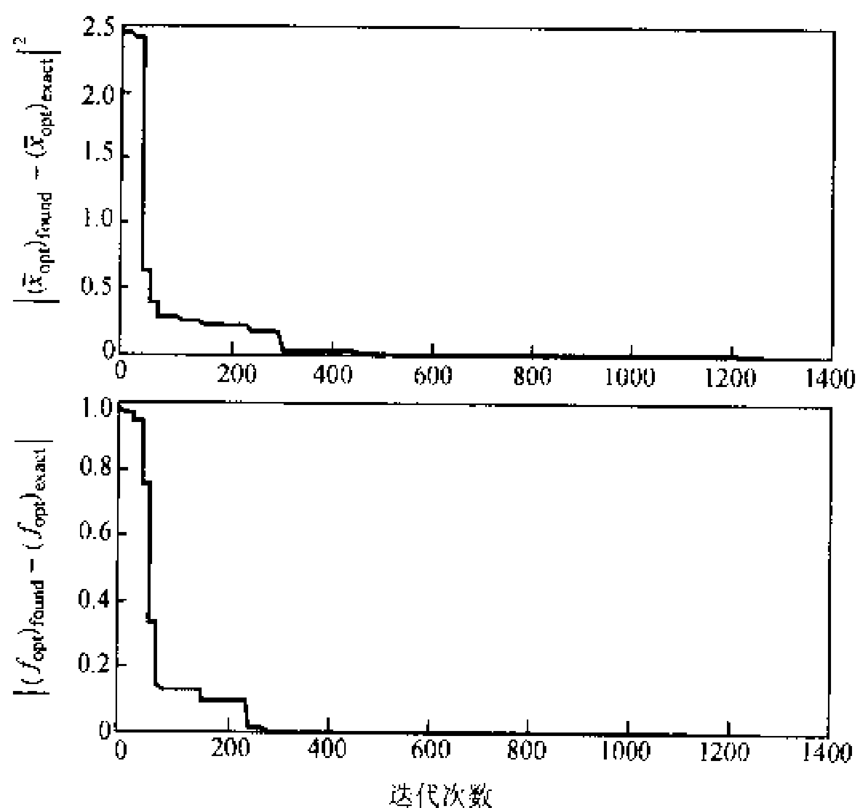



图 6－18　TS 算法的搜索轨迹

### 6.3.5 矢量优化算法

前面研究了单目标函数全局优化(标量优化)的随机算法。已如前述,现代工程优化问题几乎全属多(冲突)目标函数的全局优化(矢量优化)问题。由于缺乏有效、可靠的矢量优化算法和工具,对于矢量优化问题,长期以来都是先将其转化成标量优化问题,然后再行求解。转换方法主要有两种:(1) 将不同目标函数乘以不同的权因子后求和,以形成新的单一目标函数,即 $f_{new}=\sum_{i=1}^{k} w_i f_i$($w_i$ 为权因子,$f_i$ 为第 $i$ 个目标函数);(2) 选择最主要的目标为目标函数,而将其余的作为约束条件。然而,这种处理方法的不足之处在于:(1) 权因子(或目标的选择)具有很大的人为因素,因而优化结果有很大的主观性。此外,使用场合和时间的变化,人们关心的重点也会略有不同。如在某些场合人们可能会比较侧重装置的性能,而在另一些场合,人们则更关心装置的成本。因此,需要优化算法能给出从成本或性能不同角度考虑的优化方案;(2) 有些因素在设计前是不清楚的,只有优化设计才能进一步确定。因此,矢量优化转化为标量化的优化技术远不能满足工程实际的要求。

显然,矢量优化问题的理想优化算法应能给出侧重不同目标函数的不同优化方案,以满足工程上根据运行条件、应用场合以及不同用户要求等作出灵活、合理的选择。这一问题的解决,涉及矢量优化问题的 Pareto 解。这一创见由法国人 Pareto 提出,所以把侧重不同目标函数矢量优化问题的一系列解称为 Pareto 解。对于优化问题

$$\min \quad \bar{f}(\bar{x}) \qquad (\bar{x} \in X) \tag{6-16}$$

其中

$$f: X \to E^k$$

$$X = \{\bar{x} \in E^n \mid \bar{g}(\bar{x}) \geqslant 0, \bar{h}(\bar{x}) = 0\} \tag{6-17}$$

而

$$[\bar{x}] = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

$$[\bar{f}(\bar{x})] = [f_1(x) \quad f_2(\bar{x}) \quad \cdots \quad f_k(\bar{x})]^T,$$

$$[\bar{g}(\bar{x})] = [\bar{g}_1(x) \quad \bar{g}_2(x) \quad \cdots \quad \bar{g}_m(\bar{x})]^T$$

$$[\bar{h}(\bar{x})] = [\bar{h}_1(\bar{x}) \quad \bar{h}_2(x) \quad \cdots \quad \bar{h}_p(x)]^T。$$

Pareto 解定义为:点 $\bar{x}^*$ 为矢量优化问题(6-16)的一个 Pareto 最优解,当且仅当:在 $E^n$ 中不存在点 $\bar{x}$ 满足 $f_i(\bar{x}) \leqslant f_i(\bar{x}^*)$ $(i=1,2,\cdots,k)$,同时至少存在某一 $i_0 \in [1,2,\cdots,k]$ 使得 $f_i(x) \leqslant f_i(\bar{x}^*)$。换言之,点 $\bar{x}^*$ 为矢量优化问题(6-16)的一个 Pareto 最优解,当且仅当:其他点 $\bar{x}$ 在改进某些目标函数的同时,不得不牺牲至少一个其他目标函数。

为便于理解，图 6 - 19 给出了 2 个目标函数极小化问题 Pareto 解的示意图。图中虚线和粗实线围成的区域为目标函数空间($E^k$)，而其中粗实线即为该问题的 Pareto 解。

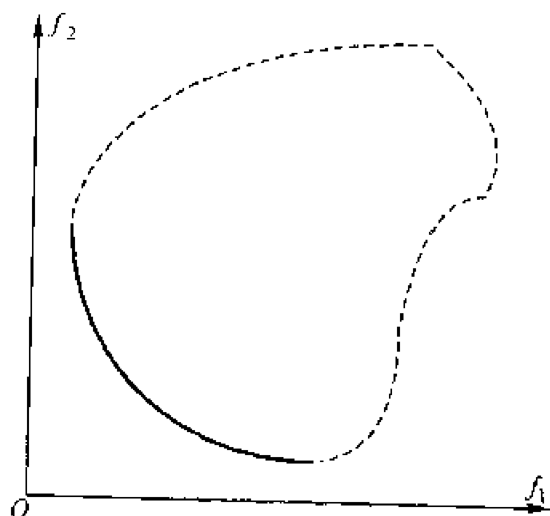



图 6 - 19 双目标函数极小化 Pareto 解的示意图

(粗实线为 Pareto 解)

对于前述的随机优化算法，由于它们是在点群中而不是在一个单点上寻优(SA 除外)，因此，它们非常适合于搜索矢量优化问题的 Pareto 解。目前，在电气工程中如何应用这些随机优化算法寻求矢量优化问题的 Pareto 解的研究刚刚起步，许多问题有待于进一步探索。著者设计了矢量优化问题的 TS 算法，利用该算法，可以寻找到矢量优化问题的 Pareto 解。限于篇幅，这里仅给出计算实例及其优化结果。

**例 6 - 7** 大型水轮发电机极弧形状的优化设计。具体表述为

$$
\begin{aligned}
&\max \quad B_{f1}(X) \\
&\min \quad e_v \\
&\text{s.t.} \quad SCR - SCR_0 \geqslant 0 \\
&X'_d - X'_{d0} \leqslant 0 \\
&THF - THF_0 \leqslant 0
\end{aligned}
\qquad (6-18)
$$

式中，$B_{f1}$ 为气隙磁密的基波分量；$e_v$ 为空载电压波形畸变率；$THF$ 为电话谐波因数；$SCR$ 为短路比。

优化变量 $X$ 为极弧的几何参数。图 6 - 20 给出了利用所设计的 TS 算法搜索到的某 300 MW、20 极水轮发电机极弧优化的 Pareto 解。根据此解，工程技术人员即可根据电机的运行条件、用户要求等确定优化设计的最佳组合方案。

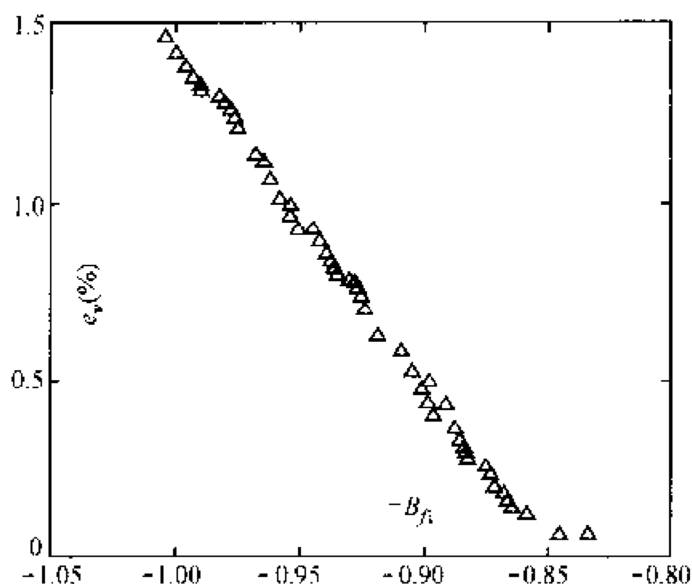



图 6·20　某 300 MW、20 极水轮发电机极弧优化问题的 Pareto 解

## 6.4　电磁探测

在人类了解与利用自然资源的持续进取中，电磁场理论与地质、采矿、勘探等工程技术领域的需求相结合，形成了众多造福于人类、具有工程实用价值的应用研究成果。本节展述的电法勘探、电法测井、感应测井和探地雷达等应用技术就是其中的典型实例。

### 6.4.1　电 法 勘 探

电法勘探是以岩(矿)石间电磁及电化学性质的差异为基础，探测地下状况的工程技术。通常用以勘察石油、天然气与煤田地质构造，寻找金属与非金属矿产，进行水文工程地质、城市环境、建筑基础与地下管线铺设情况的勘察等。由于勘探对象所处自然条件的多样性，故电法勘探的应用方法很多，这里仅介绍最基本的勘探方法——电阻率法。

电阻率法勘探是基于地下三维空间中各种岩、矿石相异的电阻率，通过观测地面上电流场的电位分布，藉以推测地下地质情况。

设野外观测时电流 $I$ 由位于地面的正、负点电极 $A$、$B$ 送入地下，并在另外两点电极 $M$、$N$ 处测量电位差，地下空间全为同一电阻率 $\rho$ 的均匀媒质，则根据 3.2 节可知，$M$、$N$ 两测点间的电位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_{\mathrm{M}} - \varphi_{\mathrm{N}} = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{AM}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{BM}}}\right) - \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{AN}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{BN}}}\right)$$

$$
= \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}\right) \tag{6-19}
$$

式中 $r_{AM}$、$r_{BM}$、$r_{AN}$和 $r_{BN}$分别为测点与点电极间相应的距离。由此可得

$$
\rho = \frac{\Delta\varphi}{I} \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}} = K\frac{\Delta\varphi}{I} \tag{6-20}
$$

式中

$$
K = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}} \tag{6-21}
$$

它仅与电极排列形式和距离有关，称为电极系数。

根据式(6－20)及式(6－21)，可利用四极装置测定地下均匀岩石的电阻率 $\rho$，如图 6－21 所示。




图 6－21　对称四极电阻率法的电流和电位电极的排列

当地下半空间由不同电阻率的多种岩石组成时，则由对称四极装置观测 $\Delta\varphi$ 及 $I$，并按式(6－20)及式(6－21)，算得的结果将是各种岩石电阻率的综合反映，称之为“视电阻率”，用符号 $\rho_a$ 表示，即

$$
\rho_a = K\frac{\Delta\varphi}{I} \tag{6-22}
$$

视电阻率虽然不是岩石的真电阻率，但却是地下电性不均匀体的一种综合反映。故可利用其变化规律以发现和探查地下电性不均匀体，达到找矿和解决其他地质问题的目的。事实上，视电阻率的变化反映了地下电性不均匀岩石中电场的分布情况。为揭示视电阻率与地下电场分布之间的关系，现进一步讨论如下：

由媒质的构成方程(3－5)，测点间电位差可表示为

$$
\Delta\varphi_{MN} = \int_M^N E_{MN}\mathrm{d}l = \int_M^N J_{MN}\rho_{MN}\mathrm{d}l \tag{6-23}
$$

式中 $J_{MN}$为测量电极间任意点沿 $MN$ 方向的电流密度分量；$\rho_{MN}$为测量电极间的岩石电阻率；$\mathrm{d}l$ 为测量电极间任意点沿 $MN$ 方向的元长度。

将式(6－23)代入式(6－22)，可得

$$
\rho_a = \frac{K}{I}\int_M^N J_{MN}\rho_{MN}\mathrm{d}l \tag{6-24}
$$

上式对任何布极形式、电极间距离和地下不均匀体情况均适用。该式表明，视电阻率在数值上与 $M$、$N$ 间沿地表的电流密度和电阻率的分布有关，而地表电流密度的分布，既受地表电阻率影响，又受地下电性不均匀体的影响。因此，在电

极排列一定的情况下，$\rho_a$ 的变化最终取决于地表和地下电阻率的分布。

当 $MN$ 很小时，可近似认为 $M$、$N$ 范围内的 $J_{MN}$ 和 $\rho_{MN}$ 均为常量，于是式(6－24)可简化为

$$\rho_a = \frac{K \cdot MN}{I} J_{MN} \cdot \rho_{MN} \tag{6-25}$$

当地表水平、地下为半无限均匀岩石时，应有 $J_{MN} = J_0$；$\rho_{MN} = \rho_1$；$\rho_a = \rho_1$。于是，由上式得

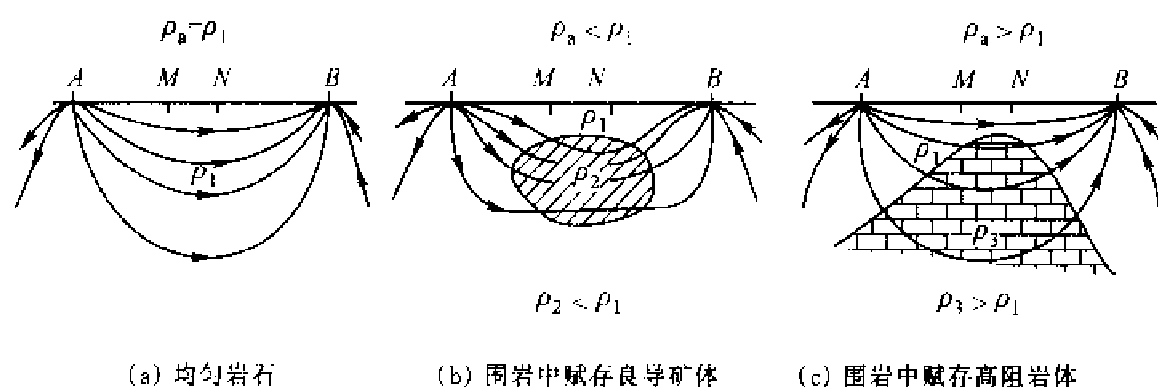
$$\frac{K \cdot MN}{I} = \frac{1}{J_0}$$

将上式代入式(6－25)，即得

$$\rho_a = \frac{J_{MN}}{J_0} \cdot \rho_{MN} \tag{6-26}$$

上式称为视电阻率的微分表示式，在定性分析视电阻率曲线与地电断面的关系时经常使用。

图6－22描绘了视电阻率与地电断面性质及其中电流密度分布间的关系。对于图6－22(a)所示地下电阻率为 $\rho_1$ 的均匀、各向同性的单一岩石，由式(6－26)可知，视电阻率 $\rho_a$ 值等于岩石的真电阻率值 $\rho_1$。图6－22(b)是在电阻率为 $\rho_1$ 的围岩中，赋存一个电阻率为 $\rho_2$ 的良导电体。由于电流汇聚于导体，其结果必然有 $J_{MN} < J_0$。又因 $\rho_{MN} = \rho_1$，所以由式(6－26)可得 $\rho_a < \rho_1$。图6－22(c)是在电阻率为 $\rho_1$ 的围岩中，埋藏有一局部隆起的电阻率为 $\rho_3$ 的高阻基岩。由于电流受高阻岩体的排斥，其结果是 $J_{MN} > J_0$。同样，因 $\rho_{MN} = \rho_1$，所以由式(6－26)可得 $\rho_a > \rho_1$。




(a) 均匀岩石　　(b) 围岩中赋存良导矿体　　(c) 围岩中赋存高阻岩体

图6－22　视电阻率与地电断面性质的关系

基于上述应用原理，工程上按照观测目的及装置特点，电阻率法还可区分为电测深法及电剖面法两大类。前者探测电阻率随深度的变化情况，以了解某些标准层的埋藏深度及起伏情况；后者探测电阻率沿水平方向变化的情况，用以寻找和确定矿体、断层、岩性界面的位置等。

电测深法通常采用的是对称四极装置。观测时，原则上保持测量电极距 $MN$ 不变，而使供电电极距 $AB$ 按一定的规律不断地增大；每改变一次，即进行一次观测(图 6－23)。由 3.3 节可知，地中电流分布主要集中在供电电极附近，而当电极距 $AB$ 加大时，电流分布的范围和深度都随之加大。因此，极距 $AB$ 愈大，勘探深度愈深，这样，由电测深法可依次获得从表层到深处不同深度范围内的视电阻率，并据以了解和判断测点所在处由浅到深的地质情况。

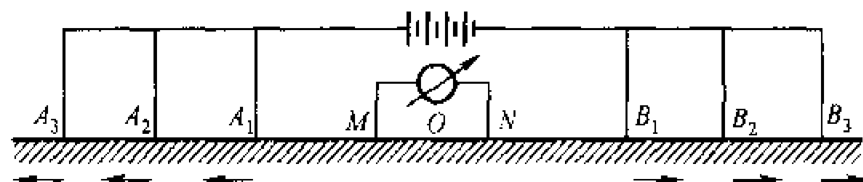



图 6－23 对称四极电测深法装置示意图

电剖面法一般是使供电电极距 $AB$ 和测量电极距 $MN$ 保持不变，并且四个电极同时移动，沿着所布置的测线在每一测点依次进行观测，获得 $\rho_s$ 值，如图 6－24所示。由于极距 $AB$ 和 $MN$ 都与勘探深度有关，在保持它们不变的条件下，勘探深度也近似不变。因此，可以认为电剖面法所了解的是沿剖面方向地下某一深度范围内不同电性物质的分布情况。

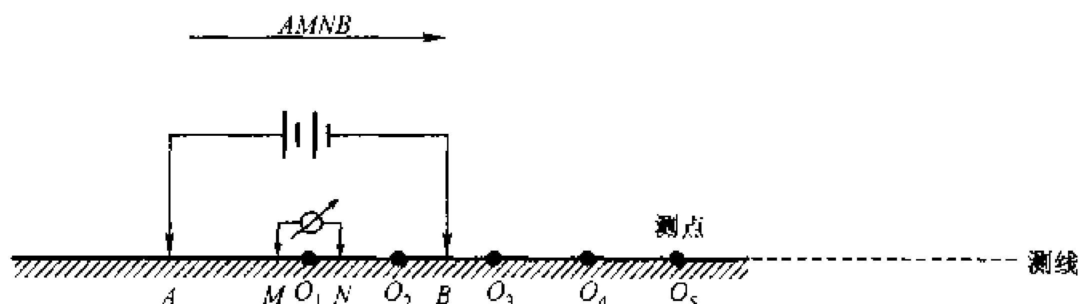


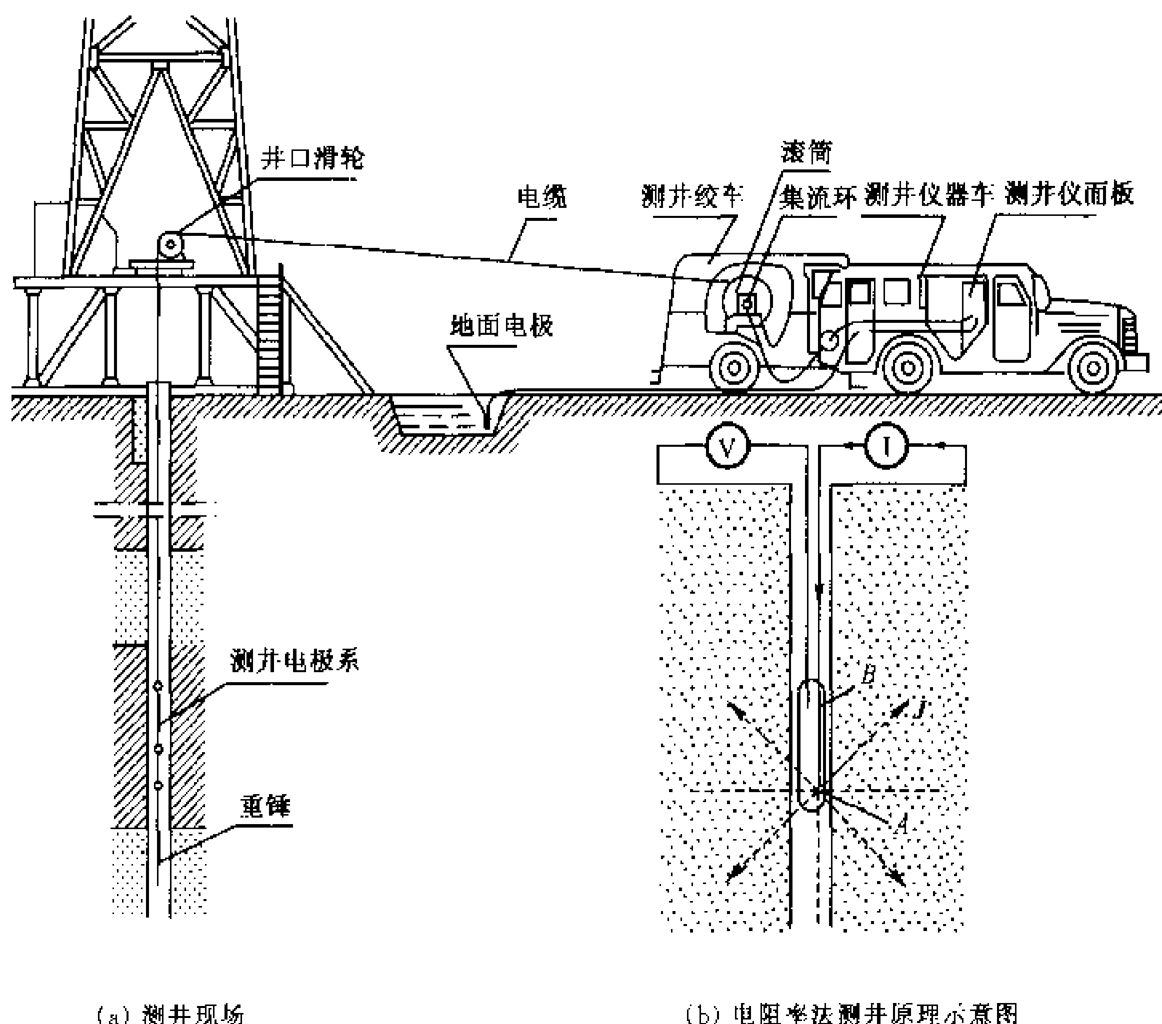

图 6－24 对称四极电剖面法装置示意图

## 6.4.2 电法测井

电法测井是根据岩石间电性的差异，在钻孔中研究岩层性质和予以区分的方法。其中，电阻率法测井是应用最早，也是最基本的一种方法。迄今，此方法仍是石油及其它钻井中地球物理测井的主要方法之一。

为寻找石油储集层，当钻井钻到一定深度后，即停钻以便测井。测井是将下井仪器沿井身放下，以便探测该口井是否穿过储油层的技术[图 6－25(a)]。如果探测到储油层，测井分析人员根据几个探测器的读数就能够估算出油藏储量。

电阻率法测井仪器是测量围绕井眼的岩层的电阻率。因为怀疑有石油储量



(a) 测井现场　　　　(b) 电阻率法测井原理示意图

图 6-25　电法测井

的地质结构通常由多空隙的沙岩构成，而充满这些空隙的液体可以是导电性良好的盐水（$\rho=0.25\ \Omega\cdot m$），或是电阻率很高的石油（$\rho=10^{14}\ \Omega\cdot m$）。因此，当电阻率探测器通过储油层时，在两个浸透着盐水的岩层之间的储油夹层会表现出相当高的电阻率读数。

当电阻率测井仪器如图 6-25(b)安置，恒定电流 $I$ 从地面通过一根绝缘电缆流到井下的电极 A，大地即为电流的返回电极。为简化问题，假定井眼中出现的泥浆电导率等于井眼周围岩层的电导率。因此，可以近似认为电极位于均匀各向同性的无限大媒质中，从而在与电极 A 相距 $d$ 处的电位电极 $B$ 测得的电位

$$\varphi_B = \frac{I}{4\pi\gamma d} \tag{6-27}$$

因而该处岩层的电阻率为

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = (4\pi d)\frac{\varphi_B}{I} \tag{6-28}$$

通常根据上式计算电阻率并记作井深的函数，称之为电阻率测井曲线，如图

6-26 所示。由图可见，在 1 540 m 与 1 550 m 之间的岩层中，呈现含有石油或天然气的有力证据。

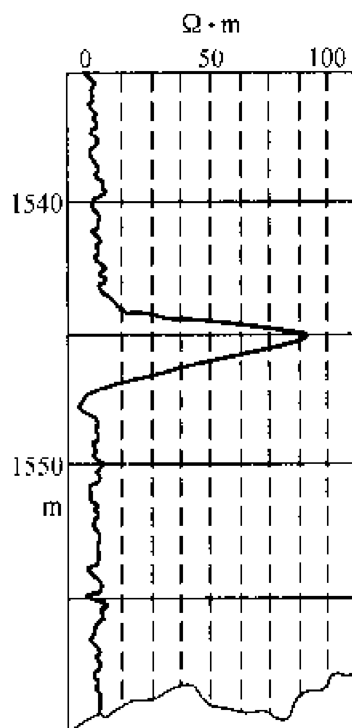



图 6-26 电阻率法测井曲线

### 6.4.3 感 应 测 井

前述的电法测井中，需要通过供电电极将直流（或者频率非常低的）电流导入地层，然后用测量电极测出井内某点的电位，这是惟有在井内有导电的泥浆时才能使用的方法。在油基泥浆井和无泥浆的干井中，显然不能使用电法测井。为此，提出了感应测井法。感应测井是根据电磁感应原理研究岩层导电性的一种方法。和电阻率测井的电极系相类似，在感应测井的井下仪器中装有线圈系，其中发射线圈 T 通以交变电流（通常为 20 kHz），在周围媒质中产生一个交变电磁场 $\Phi_1$，处在交变电磁场中的导电媒质便会感应出围绕井轴的环形电流（涡流）$i_1$。在均匀各向同性岩层中，环形电流的中心和井轴相重。该电流将产生二次磁场 $\Phi_2$，如图 6-27 所示，并在井下仪器的接收线圈 R 中产生感应电动势。在接收线圈中的感应电动势的大小与环形电流有关，而环形电流的强度又取决于岩石的导电性。所以，通过测量

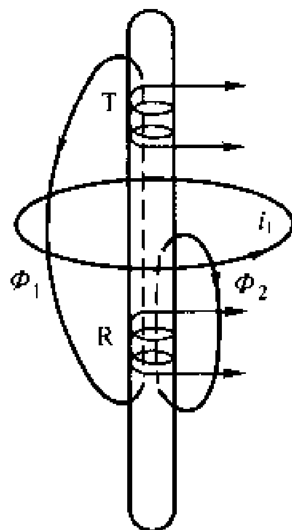



图 6-27 感应测井原理示意图

接收线圈中的感应电动势，便有可能了解岩层的导电性。

由图 6 - 27 可见，在接收线圈中，除了由媒质中环形电流产生的感应电动势外，还有由发射线圈直接在接收线圈中产生的感应电动势，这一电动势和地层导电性无关，故称为无用信号，而把与地层导电性有关的感应电动势称作有用信号。由后分析可知，两者存在一定的相位差，由此便可记录下与媒质导电性有关的有用信号。

首先，从最简情况研究有用信号与媒质导电性之间的关系。假设媒质是均匀各向同性无限大媒质，当发射线圈馈送交变电流 $i = I_m\cos(\omega t)$，通过求解电磁场的基本方程，计及滞后效应，可以导得接收线圈中所产生的互感电动势[23]

$$\dot{E} = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu S_T S_R \dot{I}}{2\pi L^3}(1 + \mathrm{j}kL)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kL} \tag{6-29}$$

式中对于沉积岩而言，$\mu \approx 4\pi \times 10^{-7}$ H/m，并设 $\gamma/(\omega\epsilon) \gg 1$；$S_T$ 和 $S_R$ 分别为发射和接收线圈的所谓总面积，即分别等于该两线圈相应的匝数与线圈横截面积的乘积；$k = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\gamma}$ 为传播系数，$L$ 为发射和接收线圈之间的距离。

为了进一步分析式(6 - 29)的物理涵义，现令 $k = P(1-\mathrm{j})/L$，即 $P = \sqrt{\omega\mu\gamma} \cdot L/\sqrt{2}$ 为一实数。这样，式(6 - 29)可改写为

$$\dot{E} = \dot{E}_0[1 + \mathrm{j}P(1-\mathrm{j})]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}P(1-\mathrm{j})} \tag{6-30}$$

式中 $\dot{E}_0 = -\mathrm{j}\omega\mu S_T S_R \dot{I}/2\pi L^3$。式(6 - 30)可展开成如下级数形式：

$$\dot{E} = \dot{E}_0\left(1 - \frac{2}{3}P^3 + \frac{1}{2}P^4 - \frac{2}{15}P^5 + \cdots\right) - \mathrm{j}\dot{E}_0\left(P^2 - \frac{2}{3}P^3 + \frac{2}{15}P^5 - \cdots\right) \tag{6-31}$$

当媒质的电导率 $\gamma < 1$ S/m 时，对于频率 $f = 20$ kHz 和 $L \approx 1$ m 的线圈距，式(6 - 31)中高于二次方项在总信号中的贡献小于 10%，可以忽略不计，则有

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \dot{E}_0 - \mathrm{j}\dot{E}_0 P^2 \\ &= -\frac{\mathrm{j}\omega\mu S_T S_R \dot{I}}{2\pi L^3} - \frac{\omega^2\mu^2 S_T S_R \dot{I}}{4\pi L}\gamma\end{aligned} \tag{6-32}$$

式中第一项是与媒质无关的互感电动势，当属前述的无用信号；第二项为媒质中涡流在接收线圈中产生的感应电动势，它与媒质的电导率 $\gamma$ 成正比，即所谓有用信号。由式(6 - 32)可见，无用信号和有用信号相位差 90°，因此，既可区分两者，又可在线路中加入相敏检波器来抑制无用信号。

应该注意，式(6 - 32)是在 $L$、$\omega$、$\gamma$ 数值不很大的情况下由式(6 - 31)得出的近似结果，它忽略了媒质中涡流的相互影响而引起的电磁波的幅值衰减和相位变化，即所谓集肤效应的影响。基于这一近似理论，媒质中涡流在接收线圈中

产生的感应电动势，也可以看作是各部分媒质引起的感应电动势线性相加的结果，从而能简捷地求得问题的近似解。

现首先分析一个单元媒质环在接收线圈中产生的感应信号。设发射、接收线圈和单元媒质环的相互位置如图 6－28 所示。当发射线圈 T 中通以交变电流 $i = I_m\cos(\omega t)$时，它在单元环处交链的互感磁通为

$$\Phi_1 = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \approx \mu HA = \frac{\mu S_T r^2}{2R_1^3} I_m\cos(\omega t) \tag{6-33}$$

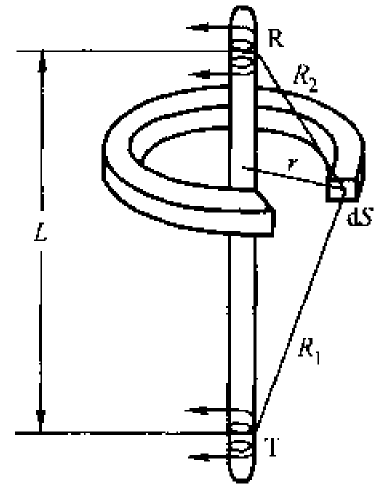


图 6－28　单元媒质环位置示意

式中 $A$ 为单元环所限定的面积，$A = \pi r^2$。因此，在单元环中引起互感电动势

$$\mathrm{d}e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega\mu S_T r^2}{2R_1^3} I_m\sin(\omega t) \tag{6-34}$$

在 $\mathrm{d}e_1$ 的作用下，单元环中产生的涡流为

$$\mathrm{d}I_1 = \mathrm{d}e_1/(2\pi r/\gamma\mathrm{d}S) = \frac{\omega\mu S_T r\gamma\mathrm{d}S}{4\pi R_1^3} I_m\sin(\omega t) \tag{6-35}$$

涡流 $\mathrm{d}I_1$ 在接收线圈 R 处交链的互感磁通为

$$\Phi_R = \mu H_R S_R = \frac{\omega\mu^2 S_T S_R r^3 \gamma\mathrm{d}S}{8\pi R_1^3 R_2^3} I_m\sin(\omega t) \tag{6-36}$$

接收线圈中因涡流产生的互感电动势为

$$\mathrm{d}e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_R}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega^2\mu^2 S_T S_R r^3 i\gamma}{8\pi R_1^3 R_2^3}\mathrm{d}S \tag{6-37}$$

整理上式得

$$\mathrm{d}e_2 = -\frac{\omega^2\mu^2 S_T S_R i}{4\pi L} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{r^3}{R_1^3 R_2^3}\gamma\mathrm{d}S = Kg\gamma\mathrm{d}S \tag{6-38}$$

式中

$$K = -\frac{\omega^2\mu^2 S_T S_R i}{4\pi L} \tag{6-39}$$

因为沉积岩中的 $\mu$ 值近似为一常数，所以 $K$ 可看作为常数，它主要由线圈系的线圈面积（$S_T$、$S_R$）、线圈距 $L$ 和交变电流频率 $\omega$ 等参数所决定，所以称为线圈系系数。式(6－38)中

$$g=\frac{L}{2}\frac{r^3}{R_1^3R_2^3} \tag{6－40}$$

它是由单元环与线圈的相对位置和距离所决定的函数，称为单元环的几何因子。

可以证明

$$\iint_{\infty} g\mathrm{d}S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g\mathrm{d}z\mathrm{d}r=1 \tag{6－41}$$

即全空间地层的几何因子为 1。因此，$g$ 的物理意义可以理解为在均匀无限大媒质中，通过任意一点截面为一个单元的单元环对总信号的相对贡献。

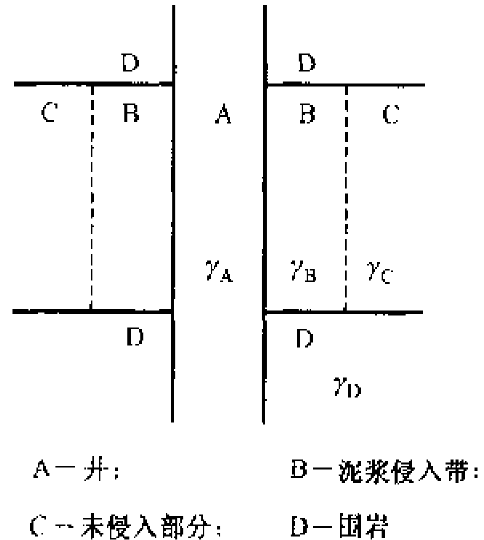
在均匀各向同性无限大媒质中，由式(6－38)和式(6－41)可以得出

$$e_2=K\gamma=-\frac{\omega^2\mu^2S_TS_Ri}{4\pi L}\gamma \tag{6－42}$$

此式与式(6－32)的第二项相对应，即有用信号。

对于非均匀媒质，例如媒质是由岩层、上下围岩和侵入带等几部分组成（图 6－29），总的有用信号可以由各分区均匀媒质的有用信号叠加得出，按式(6－38)有

$$\begin{aligned}e_2&=K\iint g\gamma\mathrm{d}S=K(\gamma_A\iint_A g_A\mathrm{d}S\\&\quad+\gamma_B\iint_B g_B\mathrm{d}S+\gamma_C\iint_C g_C\mathrm{d}S+\cdots)\\&=K(\gamma_AG_A+\gamma_BG_B+\gamma_CG_C+\cdots)\end{aligned} \tag{6－43}$$



A—井；　B—泥浆侵入带；
C—未侵入部分；　D—围岩

图 6－29　媒质非均匀分布示意图

式中 $G_A=\iint_A g_A\mathrm{d}S$，$G_B=\iint_B g_B\mathrm{d}S$，$G_C=\iint_C g_C\mathrm{d}S$ 等分别为媒质 A、B、C 等各部分的几何因子。当仪器周围是均匀各向同性无限大媒质时，显然有

$$(e_2/K)=\gamma(G_A+G_B+G_C+\cdots)=\gamma \tag{6－44}$$

当仪器周围的媒质不均匀时，和电阻率法测井中引用的视电阻率概念相类似，$e_2/K$ 为视电导率 $\gamma_a$，即

$$\gamma_a=(e_2/K)=(\gamma_AG_A+\gamma_BG_B+\gamma_CG_C+\cdots) \tag{6－45}$$

由式(6-45)可见,空间各部分媒质对总感应电动势的贡献大小,是由每部分媒质的电导率与它的几何因子两个因素决定的。该式表明,视电导率 $\gamma_a$ 是空间中各个单元环的电导率的加权平均值,其权系数就是几何因子。几何因子的空间分布与线圈系的结构有关。实践证明,只要适当选择线圈系的类型和尺寸,沿井身视电导率的变化就能在某种程度上正确反映地层电导率的变化,并根据感应测井曲线(视电导率曲线)的变化特征,可以划分钻井地层剖面和确定岩层电导率。

## 6.4.4 探地雷达

探地雷达(Ground Penetrating Radar 简称 GPR)是用频率介于 $10^6 \sim 10^9$ Hz 的无线电波来确定地下介质分布的一种方法。它是一种高分辨率探测技术,可以对浅层地质问题进行详细填图,也可以对地下浅部埋藏的目的体进行无损探测。在 20 世纪初就已提出应用电磁脉冲波技术确定地下结构的研究课题。由于地下介质比空气具有较强的电磁衰减特性,加之地质情况的复杂性,电磁波在地下的传播要比空气中的传播复杂得多。因此探地雷达应用初期,仅限于对电磁波吸收很弱的冰层、岩盐等介质的探测。20 世纪 80 年代以来,随着电子信息技术和计算机技术的飞速发展以及先进数字处理技术的应用,使探地雷达的分辨率与探测深度大大提高。探地雷达的应用从冰层、盐矿等弱耗介质扩展到土层、煤层以及岩层等有耗介质,已在矿产资源勘探、灾害地质勘查、岩土工程调查、考古调查、管线探测、公路工程质量检测、工程建筑物结构调查等多个领域中得到了广泛应用。

探地雷达与探空雷达相似,也是利用宽带高频时域电磁脉冲波束的反射来探测目标体,只是它的频率低于后者,并且是从地面向地下发射电磁波来实现探测,故亦称之为“地质雷达”。脉冲时间域探地雷达通常由接收、发射两部分组成。发射部分通过天线(T)向地下发射超高频宽频带短脉冲(脉宽为数纳秒以至更小)电磁波,接收部分通过天线(R)接收经地下界面或目标体反射折向地表的反射波时间序列,如图 6-30 所示。根据接收到的反射波的旅行时间、幅度与波形资料,可推断地下介质的结构与分布。脉冲波旅行时间为

$$t = \sqrt{4z^2 + x^2}/v \qquad (6-46)$$

当地下介质中的波速 $v$(m/ns)为已知时,可根据精确测得的走时 $t$(ns),由上式求出反射物的深度 $z$(m)。

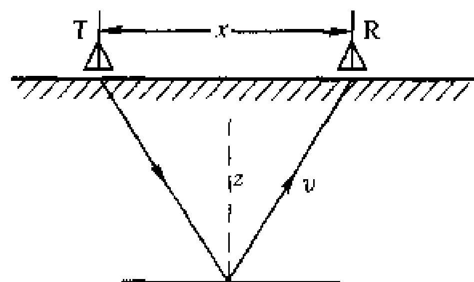


图 6-30 探地雷达探测原理

波的双程走时由反射脉冲相对于发射

脉冲的延时进行测定。反射脉冲波形由重复间隔发射(重复率 20 kHz ~ 100 kHz)的电路,按取样定律等间隔地采集叠加后获得。考虑到高频波的随机干扰性质,由地下返回的反射脉冲系列均经过多次叠加(叠加次数从几十至数千)。这样,若地面的发射和接收天线沿测线以等间隔移动时,即可在纵坐标为双程走时 $t$(ns),横坐标为距离 $x$(m)的探地雷达屏幕上绘出仅仅由反射体的深度所决定的"时距"波形道的轨迹图(图 6-31)。

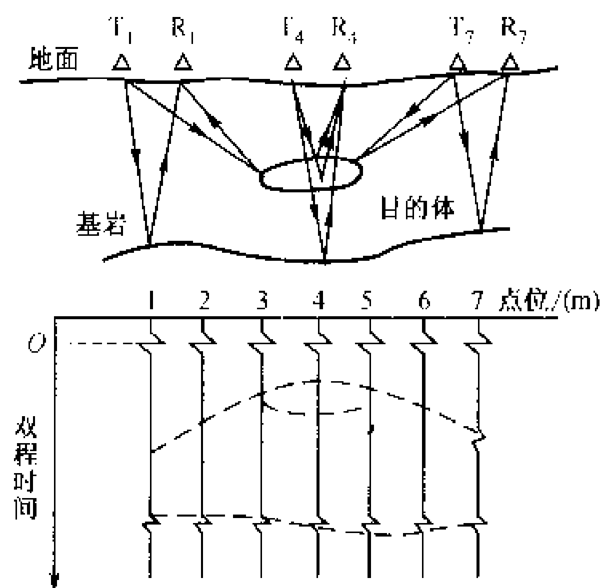



图 6-31 雷达剖面记录示意图

脉冲时间域探地雷达是利用超高频短脉冲电磁波在地下介质中的传播规律来探测地下介质的分布。根据波的合成原理,任何脉冲波都可以分解成不同频率的单谐波。因此单谐电磁波的传播特征是探地雷达的理论基础。

基于以上分析,探地雷达典型发射元天线可归结为位于大地与空气分界面上的水平电偶极子天线,如图 6-32 所示。它在空气中 $M$ 点与地下 $M_1$ 点处产

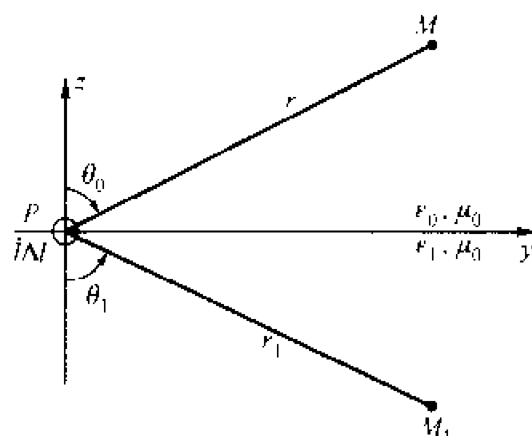


图 6-32 位于地面的水平电偶极子

生的电场强度 $\dot{E}_0$ 和 $\dot{E}_1$，根据电偶极子远场效应，参照式(5－57)，可分别导出为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_0 &= \mathrm{j}\frac{\omega\mu_0 \dot{I}\Delta l}{4\pi}\frac{2\cos\theta_0}{\cos\theta_0+\sqrt{n^2-\sin^2\theta_0}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\\ \dot{E}_1 &= \mathrm{j}\frac{\omega\mu_0 \dot{I}\Delta l}{4\pi}\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1+\sqrt{n_1^2-\sin^2\theta_1}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1r_1}}{r_1}\end{aligned}\right\} \tag{6－47}$$

式中 $n^2=\varepsilon_1/\varepsilon_0$；$n_1^2=\varepsilon_0/\varepsilon_1$。由上式可知，在大地与空气分界面上，$\theta_0=\theta_1=90°$，$E_0=E_1=0$。

在下半空间中，当 $\sin\theta_1=n_1$ 时，辐射场强 $E_1$ 有一极大值。图 6－33 为理论计算的辐射场方向图。由图可见，地下介质的介电常数愈大，电偶极子的辐射功率就愈往地下集中。

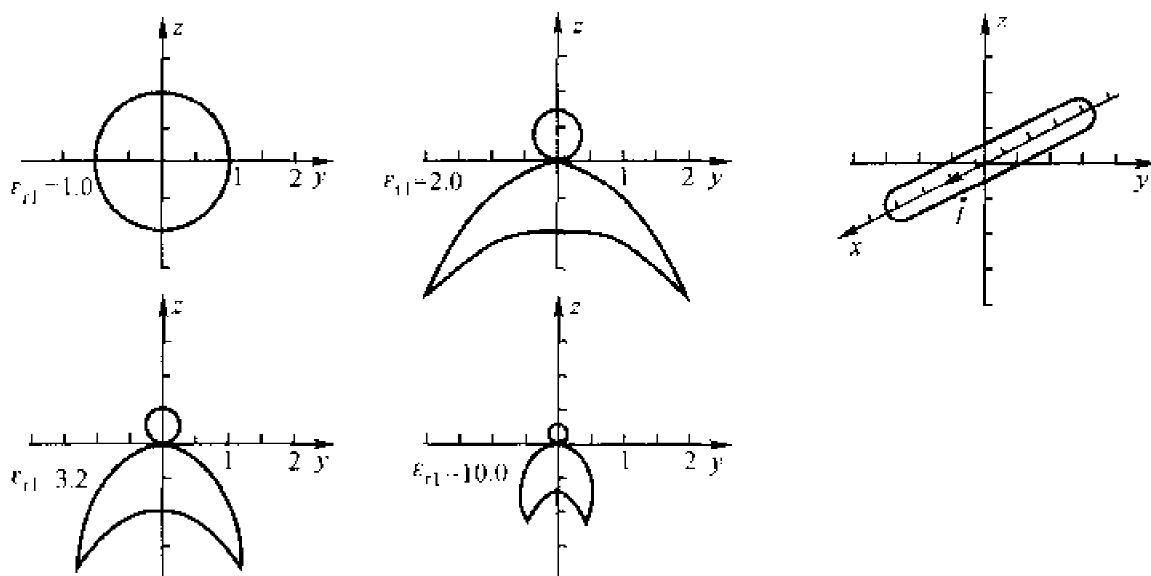



图 6－33　辐射场方向图

探地雷达测量的是地下界面反射波的走时，为了获取地下界面的深度，必须知道介质中的电磁波传播速度，参照 5.8.2 节讨论，其值为

$$v=\left[\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{6－48}$$

绝大多数岩石介质属非磁性、非导电介质，通常满足 $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\ll 1$，于是可得

$$v\approx\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{6－49}$$

式中 $c$ 为光速。上式表明，对大多数非导电、非磁性介质来说，其电磁波传播速度 $v$ 主要取决于介质的介电常数。

当电磁波在介质中传播时，其衰减特性可由衰减系数 $\alpha$ 描述，$\alpha$ 决定了场强

在传播过程中的衰减速率，对以位移电流为主($\gamma/(\omega\varepsilon)\leqslant 1$)的介质，其近似值为

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{6-50}$$

即 $\alpha$ 与电导率成正比，与介电常数的平方根成反比。

鉴于探地雷达的电磁波在两种不同的均匀介质分界面上将发生反射与折射。参照 5.6.2 节讨论，波从介质 1 入射到介质 2 时界面的反射系数和折射系数分别为：

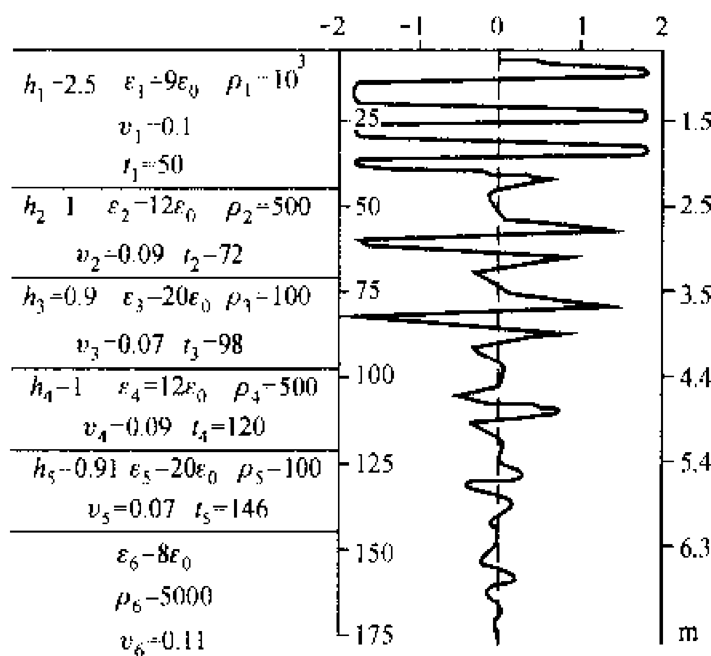
$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= (\cos\theta_i - \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i})/(\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin\theta_i}) \\ T_{12} &= 2\cos\theta_i/(\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin\theta_i}) \end{aligned}\right\} \tag{6-51}$$

式中 $n$ 表示折射率，$n=\sqrt{\mu_2\varepsilon_2/\mu_1\varepsilon_1}$。

在以上概括应用原理和方法的基础上，现给出一维探地雷达合成记录的计算实例如下：

假设在地面以下半无限空间内有($n+1$)层电性介质，这时有 $n$ 个电性分界面。设每个电性层的厚度为 $h_i$，电磁波速度为 $v_i$，介电常数为 $\varepsilon_i$，每个电性界面的反射系数为 $R_i$，折射系数为 $T_i$($i=1,\cdots,n$，表示第 $i$ 个电性层或电性分界面)。地面上放置一个电偶极子源 $\dot{I}\Delta l$。

当发射脉冲的子波和各层的电学性质已知，地下介质又是非色散媒质时，就可用褶积方法按前述概括的应用原理，计算得出一维合成雷达记录，如图 6－34 所示。图 6－34 中左侧是地层的参数，右侧为由地层参数经过褶积运算所得的雷达反射波的时间序列。




双程走时 (ns)

图 6－34 一维合成雷达记录

## 6.5 电磁环境与电磁兼容技术

随着微电子技术和信息技术的高速发展,各类电子、电气、通信、计算机、办公自动化、医疗和家用电器设备以及基于计算机控制的各类系统获得广泛的应用,同时也导致人类生存空间的电磁环境日趋恶化。如何保障电子设备或系统在一定的电磁环境中正常工作,如何控制电磁干扰、保护人类生存的电磁环境,已成为电磁兼容(Electromagnetic Compatibility,简称 EMC)学科研究的主要内容。

欧洲共同体于 1996 年 1 月 1 日起率先强制执行电磁兼容指令。指令规定所有电子、电器产品或设备必须符合电磁兼容要求,加贴 CE 标志后才能在欧洲共同体市场销售。因此,电磁兼容问题已成为人类广泛关注和亟待解决的一个重要的技术问题。本专题将从五个方面概括电磁环境与电磁兼容技术。

### 6.5.1 电磁环境与电磁干扰源

自然界自身存在的电磁场和人为产生的电磁场共同建立了人类生存的电磁环境。

众所周知的大地磁场,大气电场,以及雷电、太阳黑子活动和宇宙电磁辐射等,形成对各类电子设备或系统的自然电磁干扰源。

当代人类在享受科学技术成就为人类带来的巨大物质利益的同时,也大量地制造了人为电磁干扰源,劣化了人类生存空间的电磁环境。这些人为电磁干扰源可分为如下八类:(1) 无线电发射设备;(2) 工业、科学和医疗用射频设备;(3) 电力、交通和工业设施;(4) 照明器具和家用电器;(5) 办公自动化设备;(6) 计算机及其外围设备;(7) 静电放电;(8) 核电磁脉冲。表 6-6 给出了美国一些家用电器在 30 cm 处的电场强度和磁感应强度的测量值。

**表 6-6 美国一些家用电器在 30 cm 处产生的电场强度和磁感应强度的测量值**

| 家用电器 | 电场强度(V/m) | 家用电器 | 磁感应强度(mT) |
|---|---|---|---|
| 电热毯 | 250 | 电动工具 | 1—25 |
| 电热炉 | 130 | 吸尘器 | 2—20 |
| 音响 | 90 | 电动剃须刀 | 0.08—9 |
| 电冰箱 | 60 | 微波炉 | 4—8 |
| 电熨斗 | 60 | 吹风机 | 0.01—7 |
| 吹风机 | 40 | 电视机 | 0.04—2 |
| 电视机 | 30 | 碎纸机 | 1—2 |
| 吸尘器 | 16 | 电烤箱 | 0.15—0.5 |

无论是自然电磁干扰源，还是人为电磁干扰源，它们不仅影响人类的健康，而且制约着人类的生产活动。电磁兼容性概念的提出，是指给定设备或系统在其电磁环境中能正常工作且不对该环境中任何事物构成不能承受的电磁骚扰的能力。由此形成的电磁兼容技术包含了两个方面的内容：一方面是设备或系统在其电磁环境的电磁骚扰下不降低运行性能的能力，这种能力称为设备或系统的电磁抗扰度；另一方面是设备或系统在其电磁环境内正常工作时产生的电磁发射不能引起该环境中其他设备或系统性能的降低，这类设备或系统的电磁发射，又称为电磁干扰。所以，电磁兼容学科就是研究电磁干扰和抗电磁干扰问题的学科。

电磁兼容学科是以电磁场理论为基础、涉及电路理论、电子技术、电磁测量、信号分析、自动控制和通信等领域的一门新兴的综合性学科。内容十分广泛，实用性强，几乎所有的现代工业都必须解决电磁兼容问题。

## 6.5.2 电磁干扰的传播途径

任何的电磁干扰都是由电磁干扰源、电磁干扰传播途径和对电磁干扰能量敏感的敏感设备这三个基本要素构成的。因此，研究电磁干扰传播途径是解决电磁兼容问题的一个非常重要的环节。

图 6-35 定性地画出了电磁干扰源和敏感设备之间可能存在的三种电磁干扰传播途径：(1) 空间辐射电磁场的直接耦合；(2) 空间电磁场通过敏感设备各类导线的感应耦合；(3) 电源线和接地线等公共连接线产生的直接电气耦合。

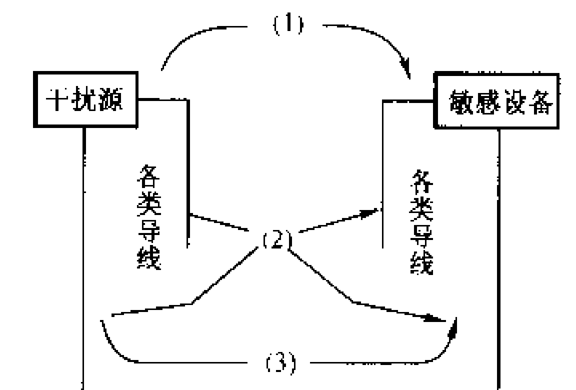



图 6-35 电磁干扰的传播途径

一般将上述耦合途径分为两大类。第一大类为电磁场耦合，主要指通过空间电磁场形式产生的耦合，如电磁辐射、静电感应（容性耦合）、电磁感应（感性耦合）和大地电流传导（阻性耦合）；第二大类为传导耦合，主要指通过金属连接导线形式产生的耦合，如公共电源内阻抗耦合和公共接地阻抗耦合等。图 6-36

给出了耦合途径的分类。

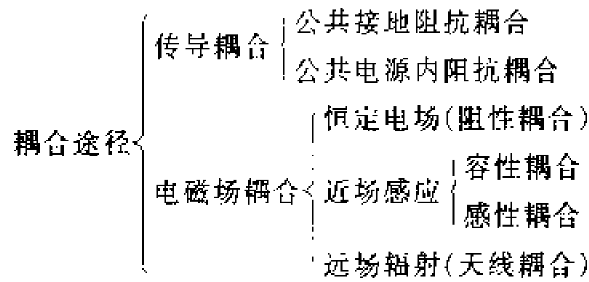



图6-36 耦合途径的分类

可以看出,借助电路理论可以直接计算传导耦合,借助电磁场理论可以直接计算辐射耦合。如应用恒定电场方法可以计算埋于大地中接地网的接地电阻或两个相邻接地网的转移接地电阻等;应用静电场和恒定磁场方法可以计算干扰源与敏感设备导线之间的耦合电容和耦合电感;应用动态电磁场方法可以计算敏感设备接收到的干扰源辐射电磁场等。所以,电磁场理论是研究电磁兼容问题的基础。在电磁干扰计算中,主要用到的模型有电路模型、传输线模型和天线模型。

### 6.5.3 电磁干扰的抑制技术

根据电磁干扰三个基本要素的特点,解决电磁兼容问题、控制电磁干扰除限制电磁干扰源的电磁发射、提高敏感设备的抗扰度外,一个有效的措施是在电磁干扰传播途径上采取措施。控制电磁干扰的主要技术措施有滤波技术、接地技术、屏蔽技术和搭接技术。

滤波技术的基本原理是在敏感设备的外接端口连线上加装滤波器,以选择信号、抑制干扰。如各类电源滤波器、数字信号线滤波器和一些专用特殊滤波器等。所以,滤波技术是抑制传导耦合的一项非常有效的技术措施。

接地技术是任何电子、电气设备或系统必须采用的一项技术措施。一方面它是保证人身和设备安全的必要技术措施;另一方面它为电子设备或系统正常工作提供了模拟信号或数字信号的零电位基准参考点。常见的接地系统有浮地系统、单点接地系统、多点接地系统和混合接地系统。按用途分类则有安全接地、静电接地、避雷接地、电源接地、屏蔽接地和信号接地等。可见,接地技术是一项非常复杂的技术,也是抑制公共接地阻抗耦合和阻性耦合的有效技术措施。

屏蔽技术是一项将电磁干扰源和敏感设备进行空间电磁隔离、抑制辐射耦合的技术措施。主要方法有静电屏蔽、磁屏蔽和电磁屏蔽。静电屏蔽主要用金属材料制成容器或网,抑制容性耦合;磁屏蔽主要采用高导磁材料制作屏蔽体,抑制感性耦合;而电磁屏蔽则利用金属材料的涡流效应或对电磁波的反射效应

抑制空间辐射电磁场。屏蔽体的一个重要参数是屏蔽效能,定义如下:

$$S = 20\lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad 或 \quad S = 20\lg\left(\frac{H_1}{H_2}\right) \quad (单位:dB) \qquad (6-52)$$

式中,$E_1$ 和 $H_1$ 分别为入射电场强度和磁场强度,$E_2$ 和 $H_2$ 分别为透过屏蔽体的电场强度和磁场强度。屏蔽技术可以用于元件和组件的屏蔽、连接器的屏蔽、电缆的屏蔽和设备或系统的屏蔽。

搭接技术主要是解决两个金属物体之间具有良好连接的技术。可以通过机械方法或化学方法实现,以在两个金属物体之间建立一条稳定的低阻抗电气通路。如可采用铆接、熔焊、压接等永久性搭接方法,也可采用螺栓、螺钉、夹具等半永久性搭接方法。搭接技术是抑制电磁干扰的重要的工艺性措施。搭接不良或不当,不仅直接降低设备或系统的抗雷电、抗静电和抗信号电磁噪声干扰的能力,而且还影响其他抑制电磁干扰技术措施的实施效果。

### 6.5.4 电磁兼容测量场所

实验是研究电磁兼容问题的重要手段。电磁兼容测量场所主要有屏蔽室、开阔试验场、电波暗室、TEM 小室和 GTEM 小室。

屏蔽室是由低电阻金属材料制作的封闭体,利用电磁波在金属体表面产生的反射和涡流而起到电磁屏蔽。当屏蔽体接地后,同时能起到静电屏蔽作用。为了进一步屏蔽磁场,一般屏蔽室用高导磁钢板制作。屏蔽室的屏蔽效能一般在 60 dB—80 dB,大于 100 dB 的屏蔽室称为高性能屏蔽室。在屏蔽室内可以进行各类传导电磁抗扰度试验。

开阔试验场主要用于辐射电磁场试验。一般开阔试验场具有空旷、平整的地形特点,在要求的面积范围内无高于地面的反射体,且具有良好的电磁环境。开阔试验场内设置测试用天线和放置被试设备的转台,用以测试被试设备的电磁发射和被试设备的抗扰度。通常,按天线到被试设备的中心距离定义其测试法,如 3 米法和 10 米法。

电波暗室是开阔试验场的替代场所。电波暗室是内表面粘贴电磁波吸收材料以减小室内电磁波发射的金属屏蔽室。一方面它屏蔽了室外电磁场对室内被试设备的影响;另一方面它又吸收室内天线或被试设备发射的电磁能量,相当于将天线和被试设备置于一个电磁环境极为优良的无限大空间中。电波暗室内壁上粘贴的吸波材料通常是碳粉浸润过的聚氨酯泡沫或聚苯乙烯泡沫制作的角、锥形和楔形尖劈或铁氧体片。电波暗室按使用功能又分为全电波暗室和半电波暗室。全电波暗室是内壁全部粘贴吸波材料的屏蔽室,主要用于对被试设备进行辐射电磁场的抗扰度试验;半电波暗室是除地面以外均粘贴吸波材料的屏蔽

室，主要用于测量被试设备的电磁发射。电波暗室的工作频率一般为80 MHz—1 GHz(可以扩展到 18 GHz)。在电波暗室内安装有天线塔、转台、照明系统、监控系统、电源系统和各类辐射电磁场自动测试系统等，如图 6－37 所示。

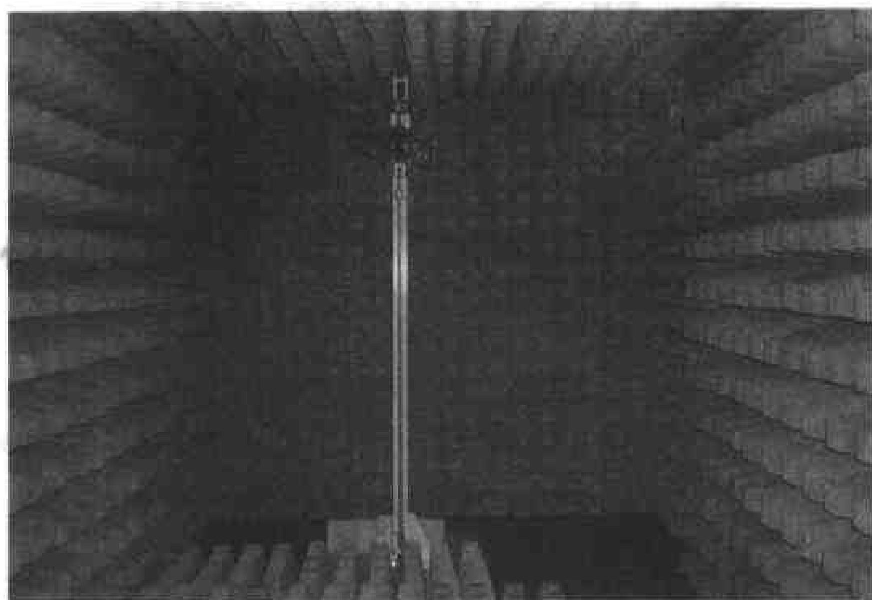


图 6－37　华北电力大学紧凑型 3 米法电波暗室

TEM 小室是横电磁波小室的简称。它是由中间为矩形截面两端为喇叭形状逐渐收缩的外导体和中间为带状隔板的内导体构成的特殊矩形截面传输线，如图 6－38 所示。在内外导体间施加电压后，将被试设备置于内外导体之间的横向电磁场中，便可进行从直流到 200 MHz 频率范围的辐射电磁场试验。图 6－39 给出了一个 TEM 小室的外观照片。

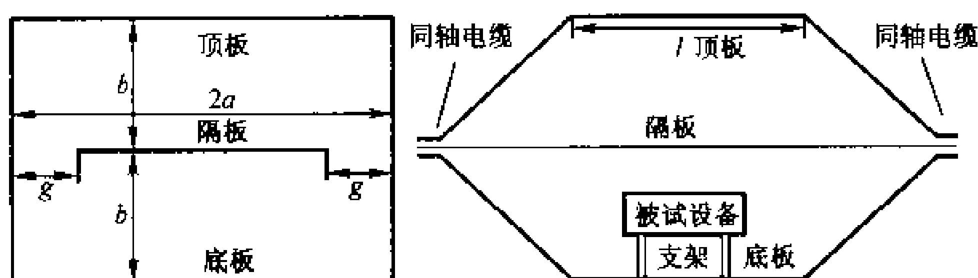



图 6－38　TEM 小室结构示意图

GTEM 小室是吉赫兹横向电磁波小室的简称。它是由带状金属隔板为内导体和矩形截面喇叭状外导体构成的特殊矩形截面传输线。在喇叭扩展端面上粘贴吸波材料，如图 6－40 所示。应用 GTEM 小室可进行从直流到 1 GHz(可扩展到 18 GHz)频率范围的辐射电磁场试验。图 6－41 给出了一个 GTEM 小室的外观照片。

TEM 小室主要用于电路模块、印刷电路板和小型电子设备的辐射电磁场试

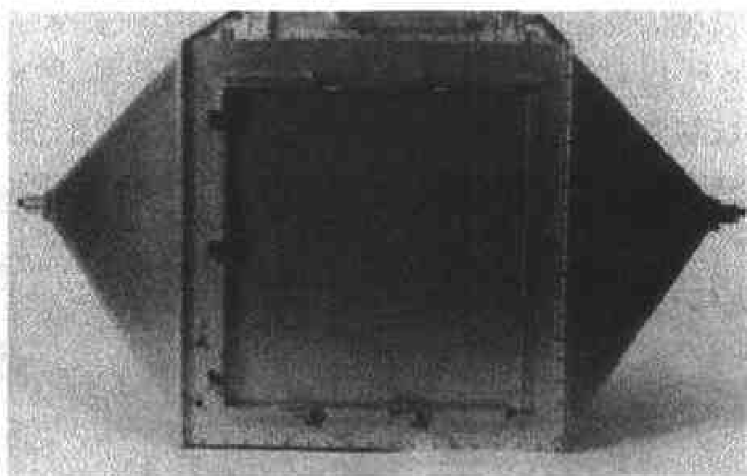


图 6-39　某 TEM 小室

验，GTEM 小室既适合小型电子设备也适合中型电子设备的辐射电磁场试验，而电波暗室主要用于大、中、小型电子设备或系统的辐射电磁场试验。

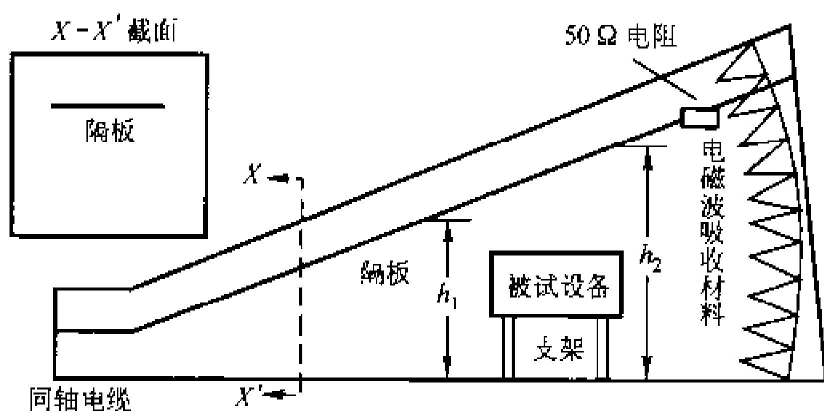



图 6-40　GTEM 小室结构示意图




图 6-41　某 GTEM 小室

### 6.5.5 电磁兼容标准

由于电磁兼容问题的重要性与日俱增，世界各国都在积极地采取相应对策，大力推进电磁兼容的标准化工作。如国际电工委员会(IEC)、欧洲电工标准化委员会(CENELEC)、美国联邦通信委员会(FCC)等均制定了电磁兼容标准。在中国国家技术监督局的领导下，我国也制定了较完备的电磁兼容标准。这些标准从结构上可分为四类：即基础标准、通用标准、产品(类)标准和专用产品标准。这些标准涉及内容十分广泛，有电磁兼容测量设备和测量方法的基础标准，有工业、科学、医疗设备、电力、交通、广播电视、信息技术、家用电器和办公自动化设备等产品(类)标准。既有电磁发射标准又有电磁抗扰度标准。有的标准涉及的最低频率为 30 Hz，有的标准涉及的最高频率可达 18 GHz。因此，熟悉和掌握电磁兼容标准是实施电磁兼容技术工作的前提。

## 6.6 生物电磁场

构成生物肌体的各种生物材料，作为物质，都是由带电粒子构成的；作为生命活体，又是一个复杂的自我调节系统。带电粒子在电磁场中要受到力的作用，因此，在生命活动以及生命活体在外界电磁环境下的生命行为中，电磁过程无疑起着重要的作用。生物电磁场是研究电磁场与生物系统相互关联、相互作用的一门学科。它与生命、环境、信息、电子、生物医学工程及材料学科等有着密切的联系。

### 6.6.1 生物系统的电磁特性

人体组织是具有生命活动的物质，物质是由带电粒子的分子和原子所组成，这些带电粒子在生命活动中遵循生物电磁场的规律(至今仍不很清楚)形成自身的电磁场与电磁波。人体组织由于各种生命活动，可产生诸如电子运动、离子转移、神经电活动等生物的电过程，从而会产生不同频率和强度、波形各异的生物电场、磁场和电流。

人体组织的物质组成中绝大部分为氢、碳、氮、氧等轻元素，通常认为是非磁性的，即人体的磁导率可看作 $\mu=\mu_0$，且绝大多数为抗磁性，少数含有过渡族原子，如 Fe、Mn、Cu 等元素的生物材料(如含 Fe 的血红蛋白、肌红蛋白和铁蛋白；含 Cu 的血蓝蛋白和肝铜蛋白)在一定条件下显现为顺磁性。因此，生物材料的结构和功能与磁性有关。磁共振(电子顺磁共振、核磁共振、穆斯堡尔效应，也称

核 $\gamma$ 共振)就是利用生物材料带电粒子的电子磁矩或原子核磁矩不为零,在外磁场的作用下,发生共振吸收的原理,采用 CT(计算机断层扫描)技术,根据获得的共振图像和谱线来研究生物材料的微观结构及其与功能之间的关系。

人体组织的电导率 $\gamma$ 是位置和频率的函数,而且随温度变化,某些组织还显现出各向异性,如脑白质,当电流平行于神经轴索纤维时其电导率是电流横跨纤维方向时的 10 倍。因此,人体组织的电学性质具有高度的非均匀性和色散性。从微观上看,各种生物组织的分子内部存在着很强的电场,而且在分子尺度范围内改变位置时,电场强度变化很大(目前的测量技术还无法测定)。通常,细胞膜内外存在着 70 mV 左右的电位差,内负外正。当神经被刺激时,大脑发出控制脉冲,上述细胞的跨膜电压瓦解,细胞放电。这样,神经冲动经过神经传导细胞的复杂系统传播到肌肉神经,并"告诉"肌肉产生所需要的运动。

当生物体置于外界电磁环境中时,生物体的带电粒子要受到场力作用而发生生命运动的变化,且取决于外界电磁场的性质而产生不同的电磁过程。如在静电场中,生物介质发生极化;时变场中,自由电子受强迫振动而产生传导电流,因介质极化产生极化电流。电流通过电子、离子的运动和碰撞,使电磁能转化为热能,生物体必然会对这种作用产生相应的生物效应。现阶段还只能通过实验、医学监测发现电磁环境中的生物效应,然后在大量的实验基础上,将进一步研究其产生的机理。

### 6.6.2 人体电磁场

电磁场与人体相互作用中的电磁场问题实质上是一个电磁散射问题,散射体就是具有非均匀、非线性、局部为各向异性参数的人体。在研究人体组织的宏观电磁特性时,可简化为宏观电磁参数——磁导率 $\mu$,介电常数 $\varepsilon$ 和电导率 $\gamma$ 的描述。

由于人体组织构成的材料复杂,无论用解析解还是数值解,都不得不作相当的简化才得以进行。例如,解析法中,将生物组织看作均匀的、或分层均匀的平板、圆柱、椭球等模型,采用几何光学、傅里叶变换与边界条件匹配、天线理论等方法求解。但由于模型过于简化,难以评价实用价值。数值法中,采用分块均匀小立方体的组合模型,常选择矩量法、张量积分方程法、时域有限差分法等。从总体上看,时域有限差分法因所需存储空间较经济、计算效率较高,故可使用更精确的人体模型,且能自动满足不连续边界条件;此外,易于模拟辐射结构及其特性,从而可在同一网格空间中模拟近场辐射与人体模型间的相互作用。若为脉冲场,则使用改进后的时域有限差分法,只需一次运行即可获得全部信息。图 6-42 是平面电磁波正入射人体时的网格空间设置,网格空间的大小采用分辨

率为 2.62 cm 的模型,对应于人体模型需要 12×23×67 个网格,分析时采用二阶近似 Mur 的吸收边界条件。图 6-43 表示入射波频率为 100 MHz 时,人体吸收的 SAR(比吸收率 Specific Absorption Rate 的简称)分布,定义为每公斤人体组织所吸收的电磁功率,是生物医学中的一个重要参数。

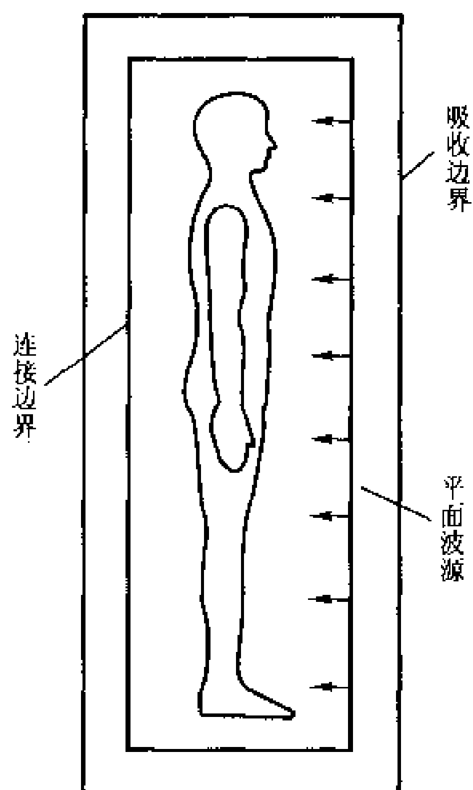



图 6-42 平面电磁波正入射人体的网格空间设置

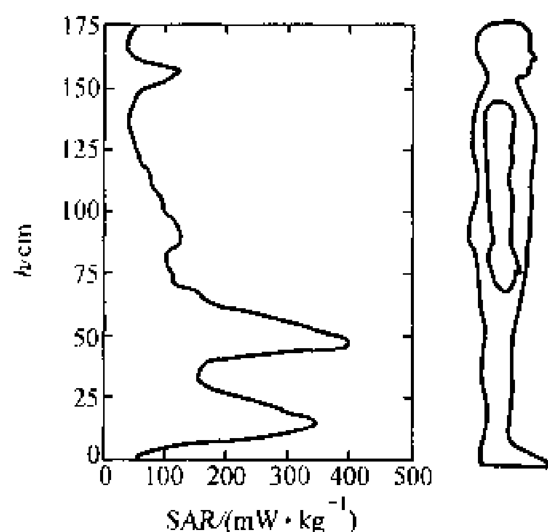



图 6-43 人体 SAR 分布

## 6.6.3 应用概况

目前,生物电磁场主要研究外界电磁环境对生物作用而引发的生物效应。一方面,利用由外界电磁场引发的生物效应得出生物医学指标统计数据来分析、研究人体生理、病理及生命活动的机理;另一方面,研究人体为避免外界电磁场伤害,所需采取的屏蔽措施,即电磁兼容技术。

移动通信的发展已使手持话机与人体健康的关系问题成为生物电磁场的研究热点。手持话机的发射功率在数瓦的数量级,但由于发话与接受信号时,天线位于头部附近,其辐射近场对人的影响不容忽视。目前,正在研究能"屏蔽"头部的话机。

肿瘤的电磁热疗法是利用射频或微波电磁场向人体组织内辐射、使肿瘤温

度提高到43 ℃以上，而当肿瘤组织的温度超过42 ℃时即可使之坏死。目前采用的辐射器有：螺旋天线、多辐射器、平板电容辐射器等。由于电磁波的穿透能力有限，如何在各种位置，尤其在体内深部，各种类型的肿瘤中产生适当的热场分布是目前仍在研究的问题。

生物医学工程中的电磁应用领域正日趋扩展，其中有各种医学影像装置：CT、磁共振成像、血管造影，X线透视等装置；各种电磁治疗仪器：电磁高温治疗仪、电磁型血流计、周林频谱仪等；此外，还有医学电子、远程医疗、生物医学康复工程等方面的应用。

生物电磁场还在仿生学，如研究信鸽导航、鳗鱼回游、蜗牛定向等与地磁场的关系；航空航天技术，如在宇宙舱体内极弱磁场环境下人生存问题；环境保护，自然电磁干扰和人为电磁干扰对人体的危害及其防护；以及工农业生产、医药卫生、军事等领域方面都有着极为广泛的应用，且日益产生极其重要的影响与作用。

## 6.7 磁悬浮技术

磁悬浮技术，常简称为磁浮技术，系利用磁场产生的磁场力来克服重力，使物体无接触地悬浮于空中的技术。磁浮技术作为电磁应用技术的一个重要分支，在众多学科科学成就相互交叉、渗透的基础上，自20世纪60年代发展至今，以其节能、高效、无环境污染等独特优点在工业、军事和民用等各个领域中获得了长足的进展。

实用的磁悬浮系统是通过两个磁系统之间的磁场作用力与反作用力来实现的。从作用力的方式上区分，磁悬浮可分为吸引型和排斥型两种；从系统物质构造上区分，又可区分为常导磁悬浮、超导磁悬浮和永磁体磁悬浮三种，它们分别对应于常导电流、超导电流和永磁体三类磁场源。

(1) 磁浮列车

当前，在磁浮技术研究中，磁浮列车的研制及其商业化运作是举世瞩目的高新技术。以德国EMS(Electro-Magnetic System)型磁浮列车(常导磁浮列车)，以及日本EDS(Electro-Dynamics System)型磁浮列车(超导磁浮列车)为代表的两大主流的成果，已分别历经三十余年的研究、开发和试验线的运行，开始进入商业运行的具体规划。我国浦东国际机场的地面客流线即将是采用德国EMS型磁浮列车的世界上第一条高速交通运输线(长33 km，时速430 km/h，全程运时8 min)。

EMS型磁浮列车的横断面示于图6－44。可以看出，与电磁场应用技术关联的关键装置有：图中①的悬浮(支承)电磁铁。当其线圈通电后所产生的纵向

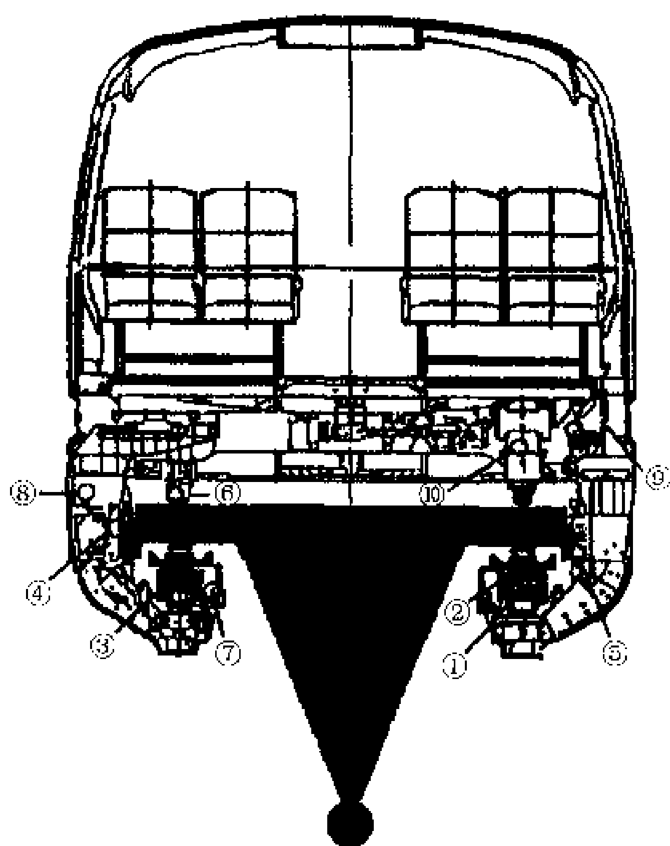



图 6-44 常导磁浮列车横断面示意图

① 支承磁铁(纵向磁铁); ② 有驱动绕组的定子铁芯; ③ 直线发电机绕组;
④ 导向磁铁(横向磁铁); ⑤ 涡流制动磁铁(纵向磁铁); ⑥ 支承滑板;
⑦ 传感器(车辆定位); ⑧ 悬浮框架; ⑨ 车体空气悬挂; ⑩ 空气弹簧

磁通将使其与三角形梁下的导磁体(图中直线电动机的长定子铁心②)相吸引,使车体浮起,形成 8—10 mm 悬浮气隙;图中③是安装在支承磁铁极靴上的直线发电机的三相绕组,它随着列车运行在定子端电源的作用下感生交流电,也就是说,以非接触形式提供支承磁铁励磁、空调等其他辅助装置所需的辅助电能;图中④是安装在车辆两侧的导向电磁铁(横向磁铁),通电后吸引三角形梁侧面的导磁体(钢梁),这样,在左右两侧导向磁铁作用下,调节两侧相等的导向气隙,从而实现无接触导向;图中⑤是安装在车辆两侧的附加制动装置,该装置利用产生涡流效应的制动磁铁,以保证在制动工况下产生附加的减速制动力;图中⑦是用于车辆定位的传感器,也用于车辆运行的调节和安全保证,并控制停车点位置。

EDS 型磁浮列车的横断面示于图 6-45。超导磁浮列车与常导磁浮列车在技术上的重大差别在于前者应用了超导技术。超导磁浮列车的悬浮与导向系统采用 EDS 制,即电动推斥式,其励磁场源为安装在车辆前后端两侧的超导线圈;推进系统采用同步直线电动机,但电机转子就是上述悬浮、导向系统中的超导线

圈。应指出，图中利用侧墙安装的“8”字形悬浮、导向线圈（零磁通线圈）是发展至今的 EDS 型磁浮列车创新的关键技术。它和车体上超导线圈共同组成的悬浮、导向系统，合成了如图 6－46 所示的强磁场系统。这一强磁场系统不仅产生作用于车体的垂直向上的悬浮力，而且产生维持车体居中稳定位置的左右两侧相互平衡的导向力。目前，在日本山梨试验线上，超导磁浮列车已经创造了运行速度为 550 km/h 的世界记录。

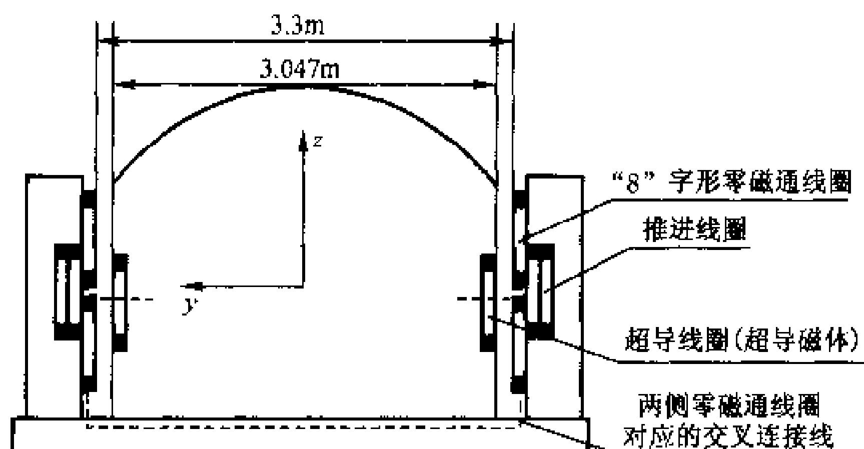



图 6－45　超导磁浮列车横断面示意图

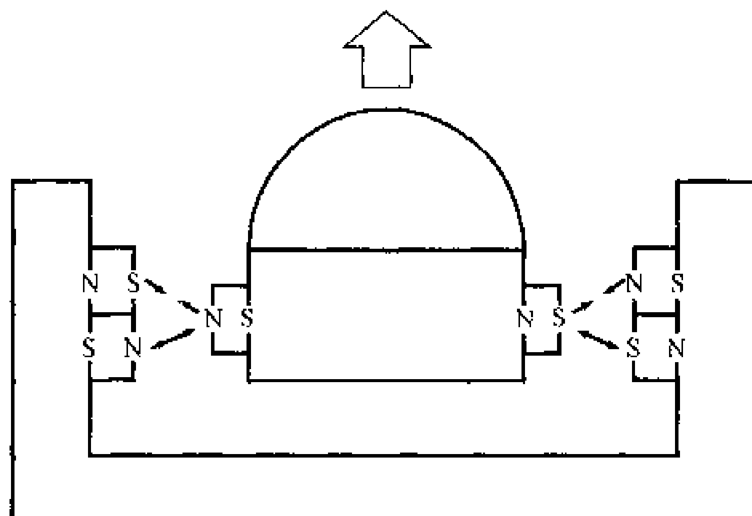



图 6－46　超导磁浮列车的悬浮原理

（2）磁浮轴承

磁浮轴承使旋转机械的轴在与轴承完全没有接触的条件下运转，从而彻底克服了传统轴承在运行中所存在的摩擦阻力、能量损失、材料磨损和摩擦噪音等一系列工程问题，具有可大幅度提高转速、提高机械寿命和运行可靠性等优异的秉性。

磁浮轴承有多种悬浮方式：直流常导吸引式、交流常导斥力方式、超导、永磁体斥力方式等。其中常导吸引式是主要应用的悬浮方式，同时几种方式也常常组合使用。图6-47描述了一种典型的磁浮轴承的结构，可以看出，实际轴承必须在轴向和径向同时实现悬浮，而且，径向悬浮还必须在多个自由度上同时独立控制。

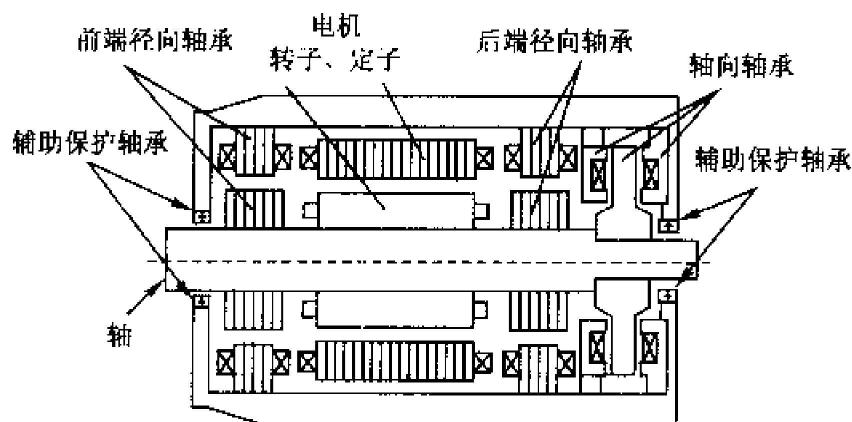



图6-47 磁浮轴承结构原理

磁浮轴承的一系列优点在一些尖端科学的工程应用上表现尤为突出。例如，在航空航天、航海及军事领域中广泛用作姿态控制基准和导航的陀螺仪，其平台的定位精度直接取决于陀螺的旋转速度。而磁浮轴承的应用，将可极大地提高陀螺旋转速度，从而获得理想的定位精度。此外，磁浮轴承在超高速电机、超高速机床、飞轮蓄能系统、水轮发电机等方面都有广阔的应用前景。

(3) 磁浮熔炼

在冶金工业中，炼制高纯度金属或高质量合金时，为保证纯度，不希望被冶炼的金属与其他材料接触。但生产过程中熔化的金属是被盛放在容器中的，这就难免混入杂质。如果将熔炼的金属悬浮起来，避免与容器接触，就可以冶炼出纯度很高、杂质极少的优质材料或合金。图6-48是基于一种高频感应悬浮熔炼原理的加工示意图，图中熔化的金属在磁悬浮的同时，由高频感应加热的方法进行冶炼，达到了完全隔绝外界和被冶炼金属之间的物理接触，防止杂质渗入的工程目的。

(4) 磁悬浮搬运

在工业生产中，磁悬浮搬运可以实现生产流程中原材料和产品的无损伤、高效率、低能耗和低噪声的传输。例如在钢板输送线上使用的钢板磁悬浮；在半导体加工的超净车间中半导体材料和半成品的搬运等。图6-49是采用常导和永磁体混合悬浮吸引方式的半导体材料输送装置的原理图。

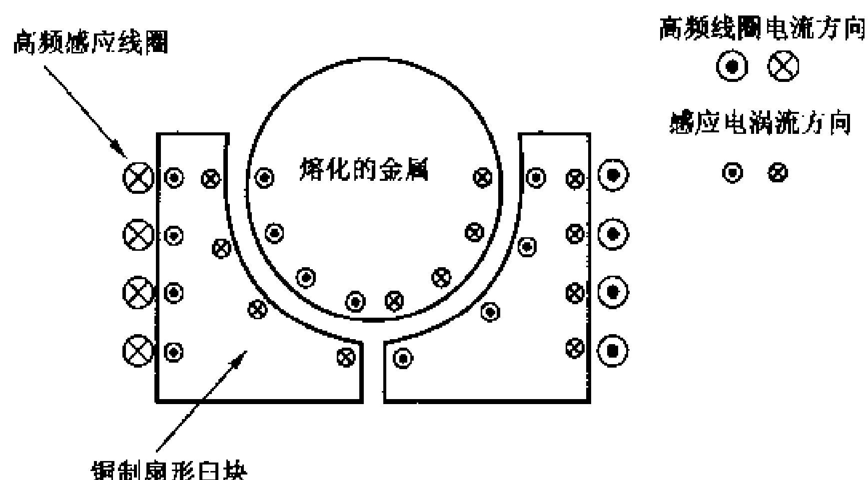



图 6-48　磁浮熔炼原理

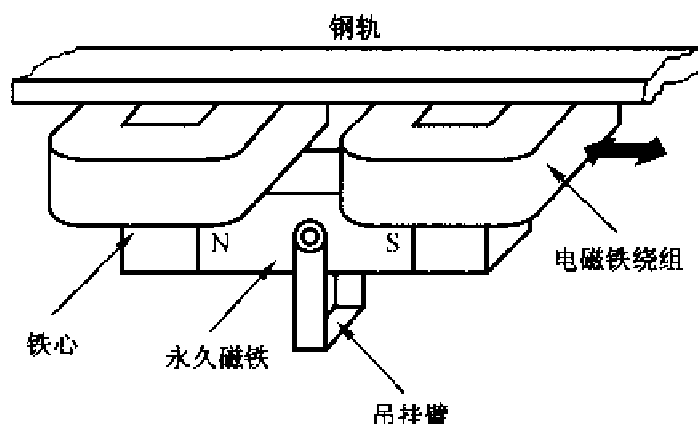



图 6-49　磁悬浮搬运原理

## 6.8　电场和磁场的光学测量法

在 5.7.4 节中,已经介绍了晶体的电光效应,即式(5-145)表达的泡克尔斯效应,以及介质的磁光效应,即式(5-147)表达的法拉第效应。本专题在于阐述这两种光学效应在电场强度和磁感应强度测量中的重要应用。

### 6.8.1　电场强度的测量

图 6-50 为测量电场强度的光学系统的示意图。图中,取 $z$ 轴为传播方向,$\lambda/4$ 波片和电光晶体的 $s$ 轴与 $x$ 轴的夹角分别为 45°,起偏器和检偏器由光学偏振片构成,起偏器的透光方向为 $x$ 轴方向,检偏器的透光方向为 $y$ 轴方向。图中所有光学元件均为非金属材料。显然,透光方向为 $x$ 轴方向的偏振片的琼斯矩阵为

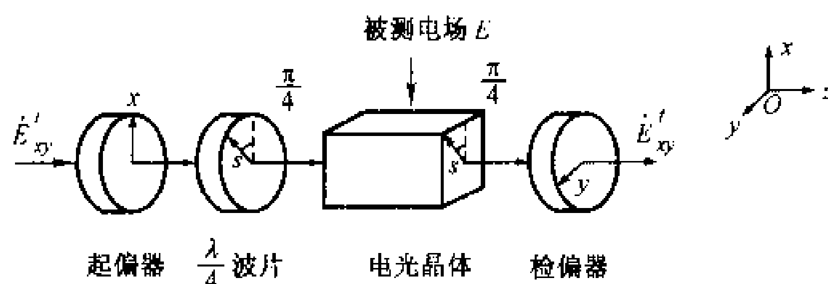



图 6 50 测量电场的光学系统

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-53}$$

如将偏振片的透光轴绕 $z$ 轴按右旋关系旋转 $\alpha$ 角，由式(5－144)，得其琼斯矩阵为

$$T_\alpha = R(-\alpha)T_x R(\alpha)$$

特别是当 $\alpha = 90°$ 时，即得透光方向为 $y$ 轴方向的偏振片的琼斯矩阵为

$$T_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-54}$$

对于图 6－50 所示光学系统，应用琼斯矩阵法，并利用式(5－140)，得检偏器透射光的琼斯矢量为

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{xy}^{t} &= T_y R\left(-\frac{\pi}{4}\right) T_\Gamma T_{\frac{\lambda}{4}} R\left(\frac{\pi}{4}\right) T_x \dot{E}_{xy}^{i} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \cdot \\
&\quad \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_{xi} \\ \dot{E}_{yi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{j}\sin\left(\dfrac{\Gamma + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \end{bmatrix} \dot{E}_{xi}
\end{aligned}$$

在光学中，将琼斯矢量模的平方定义为光强。因此，检偏器透射光的光强为

$$I_y^t = |\dot{E}_{xy}^{t}|^2 = E_{xi}^2 \sin^2\left(\frac{\Gamma + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}E_{xi}^2(1 + \sin\Gamma) \tag{6-55}$$

设起偏器的入射光为全偏振光，即

$$E_{xi}^2 = E_{yi}^2 = \frac{1}{2}(E_{xi}^2 + E_{yi}^2) = \frac{1}{2}I^i$$

其中，$I^i$ 为入射光的光强。一般而言，在光学测量系统中，光源的输出光强是恒定的，即 $I^i$ 为常数。将式(5－145)的泡克尔斯效应表达式代入式(6－55)，并引用上式，得

$$I_y^t = \frac{1}{4}I^i[1 + \sin(k_e lE)] \qquad (6-56)$$

在设计中，一般选式(6－56)中 $k_e lE \ll 1$，使 $\sin(k_e lE) \approx k_e lE$。这样式(6－56)被近似为

$$I_y^t \approx \frac{1}{4}I^i(1 + k_e lE) \qquad (6-57)$$

同理，如果将图6－50中检偏器的透光轴旋转90°，即让检偏器在 $x$ 轴方向透光，可得检偏器的透射光的光强为

$$I_x^t \approx \frac{1}{4}I^i(1 - k_e lE) \qquad (6-58)$$

显然，可以利用式(6－57)和(6－58)测量电场强度。

### 6.8.2 磁感应强度的测量

图6－51为测量磁感应强度的光学系统。图中，起偏器的透光方向仍为 $x$

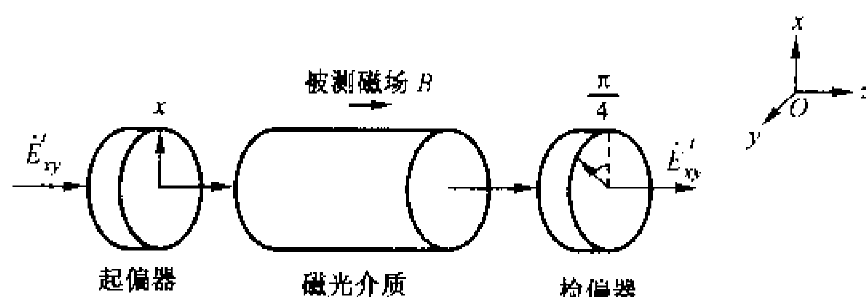



图6－51 测量磁场的光学系统

轴方向，检偏器的透光方向与 $x$ 轴方向的夹角为45°。应用琼斯矩阵法，并应用式(5－140)，得检偏器透射光的琼斯矢量为

$$\dot{E}_{xy}^t = R\left(-\frac{\pi}{4}\right)T_x R\left(\frac{\pi}{4}\right)T_\varphi T_r \dot{E}_{xy}^i$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{E}_{xi}\\ \dot{E}_{yi}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\dot{E}_{xi}}{\sqrt{2}}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

检偏器的透射光的光强为

$$I^t_{+\frac{\pi}{4}} = |\dot{E}^t_{xy}|^2 = E^2_{xi}\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}I^i[1+\sin(2\varphi)] \quad (6-59)$$

将式(5－147)的法拉第效应表达式代入式(6－59),得

$$I^t_{+\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}I^i[1+\sin(2V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l})] \quad (6-60)$$

与电场强度测量系统类似,在设计中,一般选式(6－60)中 $2V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l}\ll 1$,使 $\sin(2V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l})\approx 2V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l}$。这样式(6－60)被近似为

$$I^t_{+\frac{\pi}{4}} \approx \frac{1}{4}I^i(1+2V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l}) \quad (6-61)$$

同理,如果将图6－51中检偏器的透光轴旋转90°,即使检偏器在与 $x$ 轴夹角为－45°方向透光,可得检偏器的透射光的光强为

$$I^t_{-\frac{\pi}{4}} \approx \frac{1}{4}I^i(1-2V\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l}) \quad (6-62)$$

与电场强度测量系统类似,可以利用式(6－61)和(6－62)测量磁感应强度。

### 6.8.3 测量信号的检测

将式(6－57)和(6－58)分别与式(6－61)和(6－62)进行对比,可以看出,电场强度测量系统与磁感应强度测量系统的输出光强信号具有相似的表达形式。下面以电场强度测量系统为例,讨论测量信号的检测方法。这些检测方法也同样适用于磁感应强度测量系统。

光电二极管是检测光强信号的基本电子器件,它将输入到光电二极管上的光强信号转换为光电二极管电路中的光电流信号,且光电流信号正比于光强信号。因而在下面讨论中,将不再区分光强信号和光电流信号。

首先,设被测电场为时谐电场 $E(t)$。从式(6－57)和(6－58)可以看出,检偏器透光方向不论是 $x$ 轴方向还是 $y$ 轴方向,其输出光强信号中均含有直流分量和交流分量。在检测电路中利用滤波器分别对直流分量和交流分量进行滤波,如对式(6－58)进行滤波,得:

$$I^t_{ydc} = \frac{1}{4}I^i \quad (6-63)$$

$$I_{\text{yac}}^{t} = \frac{1}{4} I^{i} k_{e} l E(t) \qquad (6-64)$$

显然，被测电场强度可以通过以上两式的除法运算获得，即

$$E(t) = \frac{1}{k_{e} l} \frac{I_{\text{yac}}^{t}}{I_{\text{ydc}}^{t}} \qquad (6-65)$$

可以看出，在上式的除法运算中，入射光的光强被消去。这恰好在一定程度上消除或补偿了光源输出光强不稳定和光路衰减对测量结果的影响。由于式(6-65)的检测是基于一路光强信号实现的，因此，这种检测方法又被称为单光路检测法。

其次，设被测电场为静电场或瞬变电场。此时，式(6-57)和(6-58)的直流分量中含有或可能含有被测电场强度的直流分量。所以，单光路检测法不再适用。为此，需同时利用式(6-57)和(6-58)。由于渥拉斯顿棱镜可以将入射光分解为两路偏振方向相互正交的偏振光，所以，可以用渥拉斯顿棱镜置换图6-50或图6-51系统中的检偏器。这样，可以同时获得 $I_{x}^{t}$、$I_{y}^{t}$ 或 $I_{+\frac{\pi}{4}}^{t}$、$I_{-\frac{\pi}{4}}^{t}$ 两路光强信号。在光电检测电路中，对两路光电流信号进行如下加法运算和减法运算，即：

$$I_{1} = I_{y}^{t} + I_{x}^{t} = \frac{1}{2} I^{i} \qquad (6-66)$$

$$I_{2} = I_{y}^{t} - I_{x}^{t} = \frac{1}{2} I^{i} k_{e} l E(t) \qquad (6-67)$$

对以上两式做除法运算，得被测电场强度为

$$E(t) = \frac{1}{k_{e} l} \frac{I_{2}}{I_{1}} \qquad (6-68)$$

这种检测方法称为双光路检测法。可以看出，双光路检测法与单光路检测法一样，在上式除法运算中，可以在一定程度上消除光源不稳定性和光路衰减对测量精度的影响。与单光路检测法相比，双光路检测法有更广泛的适用性，它既可以用于时谐电场的测量，也可以用于静电场和瞬变电场的测量。

如果用光纤将图6-50和图6-51的光学系统连接起来，就形成了光纤电场传感器和光纤磁场传感器。由于光纤具有优越的抗电磁干扰能力和良好的电气绝缘性能，且图6-50和图6-51中的所有光学元件均是非金属的。因此，光纤电场传感器和光纤磁场传感器不仅对被测电场和被测磁场畸变作用小，而且，特别适用于测量高电位区域和远距离处的电场和磁场。这是传统电场和磁场测量方法无法实现的。

基于泡克尔斯效应和法拉第效应，还可以制作光纤电压互感器和光纤电流互感器。与传统的基于电磁感应原理的电压互感器和电流互感器相比，光纤电

压互感器和光纤电流互感器的主要优点是频带宽、动态范围大、传感单元与测量单元电气隔离、易于与计算机接口。

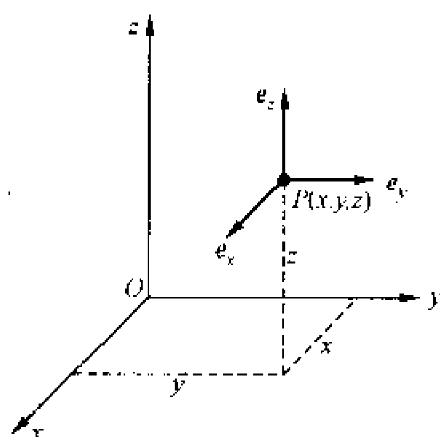
无论是光纤电场和磁场传感器，还是光纤电压和电流互感器，均在电工技术领域有重要的应用前景和价值。

# 附录一 坐标系统

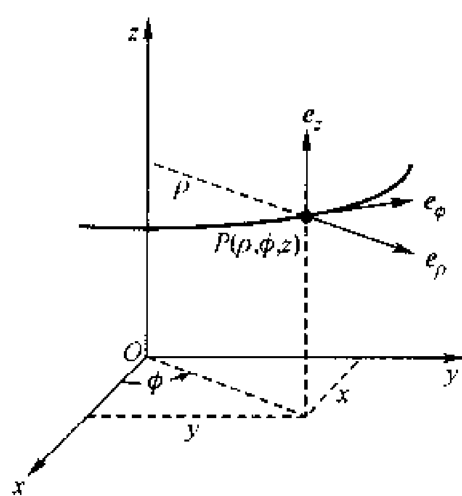
三种常用正交坐标系——直角坐标系$(x,y,z)$、圆柱坐标系$(\rho,\phi,z)$和球坐标系$(r,\theta,\phi)$的图示分别如附图1-1——附图1-3所示。在这三种正交坐标系中各空间微分元(元长度$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$、元面积$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$和元体积$\mathrm{d}V$)的关系式，以及坐标系间变换关系均列于附表1-1。

附表 1-1

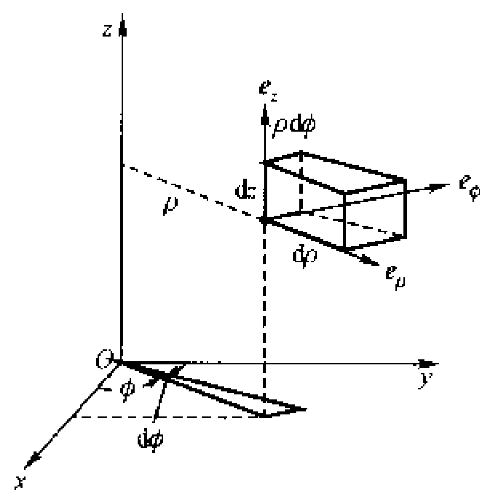
| 坐标系 | 直角坐标系$(x,y,z)$<br>(附图1-1) | 圆柱坐标系$(\rho,\phi,z)$<br>(附图1-2) | 球坐标系$(r,\theta,\phi)$<br>(附图1-3) |
|---|---|---|---|
| 单位矢量 | $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ | $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$ | $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$ |
| 元长度 | $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$ | $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{e}_\phi\rho\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$ | $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta\mathrm{d}\phi$ |
| 元面积 | $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$<br>$+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ | $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_\rho\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$<br>$+\boldsymbol{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$ | $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$<br>$+\boldsymbol{e}_\theta r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_\phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ |
| 元体积 | $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ | $\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$ | $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ |
| 坐标间转换关系 | $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$<br>$\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$<br>$z=z$<br>$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$<br>$\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$<br>$\phi=\phi$ | $x=\rho\cos\phi$<br>$y=\rho\sin\phi$<br>$z=z$<br>$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$<br>$\theta=\arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$<br>$\phi=\phi$ | $x=r\sin\theta\cos\phi$<br>$y=r\sin\theta\sin\phi$<br>$z=r\cos\theta$<br>$\rho=r\sin\theta$<br>$\phi=\phi$<br>$z=r\cos\theta$ |
| 单位矢量间转换关系 | $\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\phi$<br>$\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi$<br>$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z$<br>$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\phi$<br>$+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$<br>$\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\phi$<br>$-\boldsymbol{e}_z\sin\theta$<br>$\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi$ | $\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_\rho\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$<br>$\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_\rho\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$<br>$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z$<br>$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\rho\sin\theta+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$<br>$\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\rho\cos\theta-\boldsymbol{e}_z\sin\theta$<br>$\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi$ | $\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi$<br>$-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$<br>$\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\phi$<br>$+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$<br>$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$<br>$\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_r\sin\theta+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta$<br>$\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi$<br>$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$ |




附图 1－1　直角坐标系

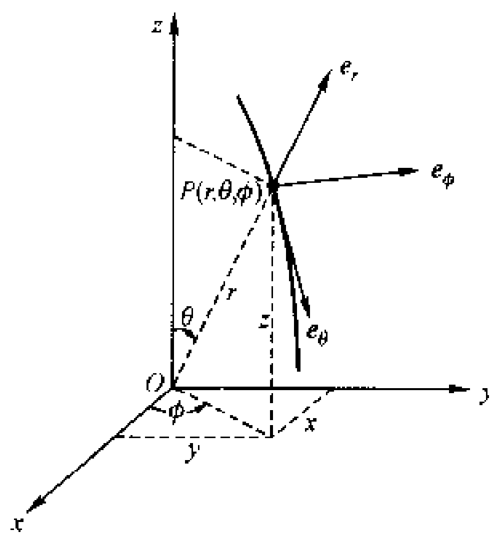



(a) 圆柱坐标系中的单位矢量

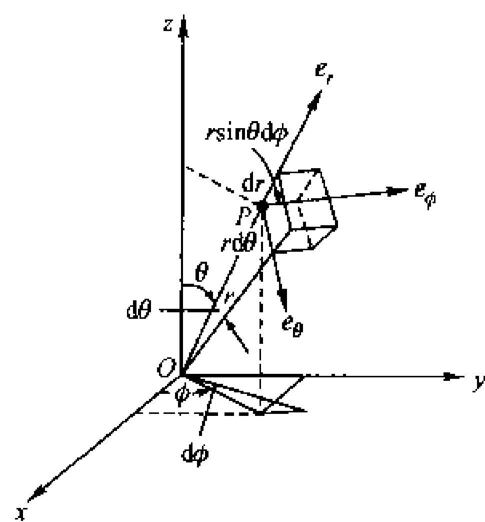



(b) 圆柱坐标系中的元体积

附图 1－2　圆柱坐标系




(a) 球坐标系中的单位矢量




(b) 球坐标系中的元体积

附图 I－3 球坐标系

# 附录二　矢量分析公式

**乘法关系式**

1. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

2. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

**微分关系式**

3. $\nabla(\psi V)=\psi\nabla V+V\nabla\psi$

4. $\nabla\cdot(\psi\boldsymbol{A})=\psi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi$

5. $\nabla\times(\psi\boldsymbol{A})=\psi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\psi\times\boldsymbol{A}$

6. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

7. $\nabla\cdot\nabla V=\nabla^2 V$

8. $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

9. $\nabla\times\nabla V=0$

10. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

**积分关系式**

11. $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$　　（散度定理）

12. $\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$　　（斯托克斯定理）

13. $\int_V [\varphi\nabla^2\psi+(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)]\mathrm{d}V=\oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$　　（格林定理）

14. $\int_V (\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S (\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S$

**梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算**

直角坐标$(x,y,z)$：

15. $\nabla V=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}$

16. $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

17. $$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

18. $$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

圆柱坐标$(\rho, \phi, z)$：

19. $$\nabla V = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial V}{\rho \partial \phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

20. $$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

21. $$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{\partial A_z}{\rho \partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \boldsymbol{e}_z \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]$$

22. $$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

球坐标$(r, \theta, \phi)$：

23. $$\nabla V = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

24. $$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

25. $$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & (r\sin\theta)\boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)$$

$$+ \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right) + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

26. $$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

# 附录三　部分材料的参数和物理常数

本附录的附表 3－1 中列出普通绝缘材料的相对介电常数 $\varepsilon_r$ 和损耗角正切 $\tan\delta=\gamma/(\omega\varepsilon)$ 在正常室温和湿度以及很低音频下的代表性数值；附表 3－2 中为一些金属导电材料和绝缘材料在频率为零和室温条件下的电导率 $\gamma$；附表 3－3 列出了一些不同性质材料的相对磁导率 $\mu_r$；附表 3－4 列出五个物理常数的值。

**附表 3－1　$\varepsilon_r$ 和 $\gamma/(\omega\varepsilon)$**

| 材　料 | $\varepsilon_r$ | $\gamma/(\omega\varepsilon)$ | 材　料 | $\varepsilon_r$ | $\gamma/(\omega\varepsilon)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 空　气 | 1.000 6 | | 瓷 | 6 | 0.014 |
| 酒　精 | 25 | 0.1 | 比拉盛 | 4.4 | 0.000 5 |
| 氧化铝 | 8.8 | 0.000 6 | 硼硅酸玻璃 | 4 | 0.000 6 |
| 琥　珀 | 2.7 | 0.002 | 石英(熔化的) | 3.8 | 0.000 75 |
| 酚醛塑料 | 4.74 | 0.022 | 橡　胶 | 2.5－3 | 0.002 |
| 钛酸钡 | 1 200 | 0.013 | 二氧化硅 | 3.8 | 0.000 75 |
| 二氧化碳 | 1.001 | | 矽 | 11.8 | |
| 锗 | 16 | | 雪 | 3.3 | 0.5 |
| 玻　璃 | 4－7 | 0.001 | 氯化钠(食盐) | 5.9 | 0.000 1 |
| 冰 | 4.2 | 0.1 | 土壤(干燥) | 2.8 | 0.07 |
| 云　母 | 5.4 | 0.000 6 | 冻　石 | 5.8 | 0.003 |
| 氯丁橡胶 | 6.6 | 0.011 | 特氟隆 | 2.1 | 0.000 3 |
| 尼　龙 | 3.5 | 0.02 | 二氧化钛 | 100 | 0.001 5 |
| 纸 | 3 | 0.008 | 水(未蒸馏的) | 80 | 0.04 |
| 有机玻璃 | 3.45 | 0.04 | 海　水 | | 4 |
| 聚乙烯 | 2.26 | 0.000 2 | 木材(干燥的) | 1.5－4 | 0.01 |
| 聚丙烯 | 2.25 | 0.000 3 | 苯乙烯泡沫 | 1.03 | 0.000 1 |
| 聚苯乙烯 | 2.55 | 0.000 05 | | | |

**附表 3－2　$\gamma$**

| 材　料 | $\gamma$(S/m) | 材　料 | $\gamma$(S/m) |
|---|---|---|---|
| 银 | $6.17\times10^{7}$ | 镍铬铁合金 | $0.1\times10^{7}$ |
| 铜 | $5.80\times10^{7}$ | 石　墨 | $7\times10^{7}$ |
| 金 | $4.10\times10^{7}$ | 矽 | 1 200 |
| 铝 | $3.82\times10^{7}$ | 铁氧体 | 100 |
| 钨 | $1.82\times10^{7}$ | 海　水 | 5 |
| 锌 | $1.67\times10^{7}$ | 石灰石 | $10^{-2}$ |
| 黄铜 | $1.5\times10^{7}$ | 粘　土 | $5\times10^{-3}$ |
| 镍 | $1.45\times10^{7}$ | 新鲜水 | $10^{-3}$ |
| 铁 | $1.03\times10^{7}$ | 未曾蒸馏的水 | $10^{-4}$ |
| 磷青铜 | $1\times10^{7}$ | 沙　土 | $10^{-5}$ |
| 焊料 | $0.7\times10^{7}$ | 花岗岩 | $10^{-6}$ |
| 碳钢 | $0.6\times10^{7}$ | 大理石 | $10^{-8}$ |
| 德国银 | $0.3\times10^{7}$ | 胶　木 | $10^{-9}$ |
| 锰 | $0.227\times10^{7}$ | 瓷 | $10^{-10}$ |
| 康铜 | $0.226\times10^{7}$ | 金刚石 | $2\times10^{-13}$ |
| 锗 | $0.22\times10^{7}$ | 聚苯乙烯 | $10^{-16}$ |
| 不锈钢 | $0.11\times10^{7}$ | 石　英 | $10^{-17}$ |

**附表 3－3　$\mu_r$**

| 材　料 | $\mu_r$ | 材　料 | $\mu_r$ |
|---|---|---|---|
| 铋 | 0.999 998 6 | 铁　粉 | 100 |
| 石　蜡 | 0.999 999 42 | 机器钢 | 300 |
| 木　材 | 0.999 999 5 | 铁氧体 | 1 000 |
| 银 | 0.999 999 81 | 坡莫合金 45 | 2 500 |
| 铝 | 1.000 000 65 | 变压器钢 | 3 000 |
| 铍 | 1.000 000 79 | 矽　铁 | 3 500 |
| 氯化镍 | 1.000 04 | 纯　铁 | 4 000 |
| 硫酸锰 | 1.000 1 | $\mu$ 磁性合金 | 20 000 |
| 镍 | 50 | 铝硅铁粉 | 30 000 |
| 铸　铁 | 60 | 镍铁钼导磁合金 | 100 000 |
| 钴 | 60 | | |

附表 3－4　物 理 常 数

| 物理常数 | 数　值 |
| --- | --- |
| 电子的电荷 | $e=(1.602\ 189\ 2\pm 0.000\ 004\ 6)\times 10^{-19}\mathrm{C}$ |
| 电子质量 | $m_e=(9.109\ 534\pm 0.000\ 047)\times 10^{-31}\mathrm{kg}$ |
| 真空介电常数 | $\varepsilon_0=(8.854\ 187\ 818\pm 0.000\ 000\ 071)\times 10^{-12}\mathrm{F/m}$ |
| 真空磁导率 | $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\mathrm{H/m}$ |
| 光速(真空中) | $c=(2.997\ 924\ 574\pm 0.000\ 000\ 011)\times 10^{8}\mathrm{m/s}$ |

# 习题参考答案

**2－1** 当 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}d$ 时，$E_x=0$；当 $x=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}d$ 时，$\boldsymbol{E}$ 量值相等，方向一致

**2－2** $\frac{\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0 l^2}\boldsymbol{e}_y$

**2－3** （1）$q_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}q$，$q_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}q$；

（2）$\boldsymbol{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1(R_1+R_2)}\boldsymbol{e}_{r1}$；$\boldsymbol{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2(R_1+R_2)}\boldsymbol{e}_{r2}$；

（3）$\frac{q_1}{q_2}=\frac{R_1}{R_2}$；$\frac{E_1}{E_2}=\frac{R_2}{R_1}$。

**2－4** （1）$\boldsymbol{D}$ 不变，$\boldsymbol{E}$、$U$ 变化（略）；（2）$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\sigma$ 均变化（略）

**2－5** $\boldsymbol{E}=\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{\rho 12}$

**2－6** （1）、（2）（略）；（3）$R_1=\frac{R_2}{e}$

**2－7** 666.67 V

**2－8** （1）$\frac{\sigma_0 a}{\varepsilon_0}$；（2）$\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$；（3）$\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

**2－9** 147 kV

**2－10** $\varphi=-134.9\ \text{V}$，$\boldsymbol{E}=61.136\boldsymbol{e}_x-72.473\boldsymbol{e}_y-20\boldsymbol{e}_z\ \text{V/m}$，

$\boldsymbol{D}=(541.1\boldsymbol{e}_x-641.4\boldsymbol{e}_y-177.0\boldsymbol{e}_z)\times10^{-12}\ \text{C/m}^2$，$\rho=88.5\times10^{-12}\ \text{C/m}^3$

**2－11** 可能被击穿。

**2－12** 0.5 cm，0.465 6 cm

**2－13** 36.70°，56.146°，74.98°，36.70°

**2－14** $\varphi=\frac{\varphi_m}{\sinh\left(\frac{\pi h}{a}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right)$

**2－15** （1）4.17 kV；（2）37.5 kV

**2－16** （略）

**2-17** $E_{max}=\frac{2U_0}{d}$

**2-18** （略）

**2-19** $\varphi_1=-\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}E_0 r\cos\theta(r\leqslant a)$

$$\varphi_2=-\left[1-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\cdot\frac{a^3}{r^3}\right]E_0 r\cos\theta\quad(r\geqslant a)$$

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}E_0\boldsymbol{e}_z\quad(r\leqslant a)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\left[\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\cdot\frac{a^3}{r^3}+1\right]E_0\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\left[\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+2\varepsilon_1)}\cdot\frac{a^3}{r^3}-1\right]E_0\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\quad(r\geqslant a)$$

**2-20** $\frac{E_{max}}{E_0}=1.22$

**2-21** (1) $\varphi_P=455.1\ln\left[\frac{\sqrt{(x+8\times10^{-2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-8\times10^{-2})^2+y^2}}\right]$；(2) $\sigma_{max}=0.134\ \mu C/m^2$，

$\sigma_{min}=0.0336\ \mu C/m^2$

**2-22** (1)0.017 04 μF；(2) 0.01705 μF

**2-23** (1) $\boldsymbol{F}=\frac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)}\left(\frac{b^2}{a}\boldsymbol{e}_x+\frac{a^2}{b}\boldsymbol{e}_y\right)$；(2) $\tau|_{y=0}=-\frac{2\tau}{\pi}\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$，

$$\tau|_{x=0}=-\frac{2\tau}{\pi}\arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$\tau|_{x=0}+\tau|_{y=0}=-\tau$$

**2-24** (1) $\varphi_P=\frac{U_0}{\ln\left(\frac{b+h-a}{a-h+b}\right)}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$；

(2) $C_l=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b+h-a}{a-h+b}\right)}$（单位:C/m）；

(3) $F=\frac{\pi\varepsilon_0U_0^2}{b\left[\ln\left(\frac{b+h-a}{a-h+b}\right)^2\right]}$（垂直指向地面）

**2-25** (1) $C_l=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{(2h_1-a)(h_1+h_2-b)}{a(b-h_2+h_1)}\right]}$ $\left(h_1=\frac{d^2-b^2}{2d};h_2=\frac{d^2+b^2}{2d}\right)$；

(2) $E_{max}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{2h_1-a}+\frac{1}{a}\right)$

**2-26** (1) $\boldsymbol{F}=-2.41\boldsymbol{e}_z$ N；(2) $\boldsymbol{E}=-321\,1.4\boldsymbol{e}_z$ kV/m，$\boldsymbol{E}_{max}=-128\,45.6\boldsymbol{e}_z$ kV/m；

(3) $\varphi = 771.43\ \text{kV}$; (4) $\oint_S \boldsymbol{D}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.714\ \mu\text{C}$

**2－27** (1) $60\ \text{kV}, \boldsymbol{E}_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r_1^2}\boldsymbol{e}_{r1} - \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{e}_{r2} + \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{e}_R, E_{\max} = 2.43\times10^6\ \text{V/m}$;

(2) $0\ \text{V}, \boldsymbol{E}_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{e}_{r1} - \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{e}_{r2}, E_{\max} = 3.6\times10^6\ \text{V/m}$;

(3) $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \dfrac{\frac{d}{a}q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{e}_{r2} - \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{e}_{r_1}$

**2－28** (1) $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$; (2) $F_e = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{a^3(a^2-2d^2)}{d^3(d^2-a^2)^2}$ （方向由 $q$ 指向球心 $O$）

**2－29** 球内：$\boldsymbol{E} = \dfrac{R_1R_2U_0}{(R_2-R_1)r^2}\boldsymbol{e}_r$；$\varphi = \dfrac{R_1R_2U_0}{(R_2-R_1)}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R_2}\right)$；

球外：$\boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1^2}\boldsymbol{e}_{r1} - \dfrac{R_2}{dr_2^2}\boldsymbol{e}_{r2}\right)$；$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{R_2}{dr_2}\right)$

**2－30** (a) $C = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 wd}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1}$; (b) $C = \dfrac{\varepsilon_1 s_1}{c} + \dfrac{\varepsilon_2 s_2}{c}$

**2－31** （略）

**2－32** $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\dfrac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} - \dfrac{1}{\varepsilon_{r2}R_3} + \dfrac{1}{R_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{r2}} - \dfrac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\right]}$

**2－33** (1) $\varphi = \dfrac{U_0}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\ln\left(\dfrac{\rho}{a}\right)$;

(2) $C_l = \dfrac{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$

**2－34** (1) $C_0 = 0.017\ \mu\text{F}, C_1 = 0.010\ \mu\text{F}$; (2) $C = C_0 + 3C_1 = 0.047\ \mu\text{F}$; (3) $2.35/l$

**2－35** 963.58 J

**2－36** (1) $W = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h}$; (2) $F = -\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}$（方向指向导板）

**2－37** $F = \dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4}$ （单位：$\text{N/m}^2$）

**2－38** $h = \dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0^2}{2mgd^2}$

**3－1** $\boldsymbol{J} = \left(\dfrac{\gamma\varphi_0}{r_0}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta$

**3-2** (1) $\varphi(\rho)=\dfrac{U_0}{\ln(R_2/R_1)}\ln\left(\dfrac{R_2}{\rho}\right)$（单位：V），$\boldsymbol{E}(\rho)=1\,442.7\cdot\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho$（单位：V/m）；

(2) $G=9.06\times10^{-9}$ S

**3-3** (1) $\varphi_1(\phi)=\dfrac{U}{\pi/4\left(1+\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}\phi+\dfrac{U(\gamma_1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2}=(5.95\phi+20.65)$ V，

$\varphi_2(\phi)=\dfrac{4U\gamma_1}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\phi=32.25\phi$ V；

(2) $I=3.137\times10^5$ A，$R=9.56\times10^{-5}\ \Omega$；

**3-4** 918 V

**3-5** (a) $\boldsymbol{B}_\text{P}=\dfrac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\boldsymbol{e}_z$；(b) $\boldsymbol{B}_\text{P}=\dfrac{\mu_0 I}{2R}(-\boldsymbol{e}_z)$

**3-6** (1) $B_\text{P}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 ID}{2\pi x(D-x)} & (x\leqslant R;R\leqslant x\leqslant(D-R)\text{和}\ x\geqslant(D+R))\\[2ex] -\dfrac{\mu_0 I(R^2-x^2+xD)}{2\pi R^2(D-x)} & (-R\leqslant x\leqslant R)\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I(x^2-R^2-xD)}{2\pi xR^2} & ((D-R)\leqslant x\leqslant(D+R))\end{cases}$

(2) $B_\text{P}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}\dfrac{D-2x}{(D-x)} & (\text{导线外})\\[2ex] -\dfrac{\mu_0 I(R^2+x^2-xD)}{2\pi R^2(D-x)} & (\text{导线 1 内部})\\[2ex] -\dfrac{\mu_0 I(x^2+R^2-xD)}{2\pi xR^2} & \end{cases}$

**3-7** (1) $\boldsymbol{B}_\text{P}=\dfrac{\mu_0 NIa^2}{2}\left\{\dfrac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1}{[a^2+(d-x)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}\boldsymbol{e}_x$；

(2) $d=a$；(3) 由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{d}{2}}=0$ 可证之。

**3-8**（略）

**3-9** $\boldsymbol{H}=\begin{cases}\dfrac{a^2J_0}{2\rho}\boldsymbol{e}_\phi & (\rho>a)\\[2ex] \dfrac{\rho J_0}{2}\boldsymbol{e}_\phi & (\rho<a)\end{cases}$，$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 a^2J_0}{2\rho}\boldsymbol{e}_\phi & (\rho>a)\\[2ex] \dfrac{\mu\rho J_0}{2}\boldsymbol{e}_\phi & (\rho<a)\end{cases}$

$\boldsymbol{M}=\begin{cases}0 & (\rho>a)\\[2ex] \dfrac{J_0(\mu-\mu_0)}{2\mu_0}\rho\boldsymbol{e}_\phi & (\rho<a)\end{cases}$，

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}=\frac{(\mu-\mu_0)J_0}{\mu_0}\boldsymbol{e}_z,\qquad \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}=\frac{(\mu-\mu_0)J_0 a}{2\mu_0}\boldsymbol{e}_z$$

**3-10** (1) $J_1=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\cdot\dfrac{I}{\pi\left[R_2^2+\left(\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}-1\right)R_1^2\right]}$；$J_2=\dfrac{I}{\pi\left[R_2^2+\left(\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}-1\right)R_1^2\right]}$；

(2) $\boldsymbol{B}_1=250\mu_0 J_1\rho\,\boldsymbol{e}_\phi\quad(\rho<R_1)$

$$\boldsymbol{B}_2=\frac{\mu_0 J_2\rho}{2}\boldsymbol{e}_\phi+\frac{\mu_0(R_1^2J_1-R_1^2J_2)}{2\rho}\boldsymbol{e}_\phi\quad(R_1<\rho<R_2)$$

$$\boldsymbol{B}_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi\quad(\rho>R_2)$$

**3-11** $\varphi_{\mathrm{mP}}=-\dfrac{I}{\pi}\arctan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

**3-12**
$$\boldsymbol{A}=\begin{cases}A_{z1}(x)=-\dfrac{\mu_0J_0}{2}x^2 & \left(|x|\leqslant\dfrac{d}{2}\right)\\ A_{z2}(x)=-\dfrac{\mu_0J_0d}{2}\left(x-\dfrac{d}{4}\right) & \left(x\geqslant\dfrac{d}{2}\right)\\ A_{z3}(x)=\dfrac{\mu_0J_0d}{2}\left(x+\dfrac{d}{4}\right) & \left(x\leqslant-\dfrac{d}{2}\right)\end{cases},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\mu_0J_0x\boldsymbol{e}_y & \left(|x|<\dfrac{d}{2}\right)\\ \mu_0J_0\dfrac{d}{2}\boldsymbol{e}_y & \left(x>\dfrac{d}{2}\right)\\ -\mu_0J_0\dfrac{d}{2}\boldsymbol{e}_y & \left(x<-\dfrac{d}{2}\right)\end{cases}$$

**3-13** 略

**3-14** 设坐标系为 $xOy$，$y$ 轴垂直于铁面

(1) $\boldsymbol{B}_{\mathrm{P}}=\dfrac{\mu_0Ix}{\pi(x^2+h^2)}(-\boldsymbol{e}_y)$；(2) $\boldsymbol{B}_{\mathrm{P'}}=\dfrac{\mu_0I}{\pi r}\boldsymbol{e}_\phi$；$\boldsymbol{H}_{\mathrm{P'}}\approx0$

(3) （略）；　　　　(4) $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mu_0I^2}{4\pi h}(-\boldsymbol{e}_y)$

**3-15** (1)(略)；(2) $F=5.45\times10^{-4}\ \mathrm{N}$ （方向为背离铁面）

**3-16** $\boldsymbol{H}(x,y)=\dfrac{0.9I}{\pi}\cdot\dfrac{x\boldsymbol{e}_y-(y+a)\boldsymbol{e}_x}{x^2+(y+a)^2}$，　$\boldsymbol{f}_l=-\dfrac{1.8\mu_0I^2}{\pi a}\boldsymbol{e}_y$

**3-17** (1) $L_0=\dfrac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\left(\dfrac{D}{d}\right)$；(2) $C_0=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{D}{d}\right)}$；(3) $Z_0=50.14\Omega$

**3-18** (1) $H=\dfrac{NI}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\phi$；(2) $\Phi=\dfrac{\mu NIh}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$；(3) $L=\dfrac{\mu N^2h}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$；